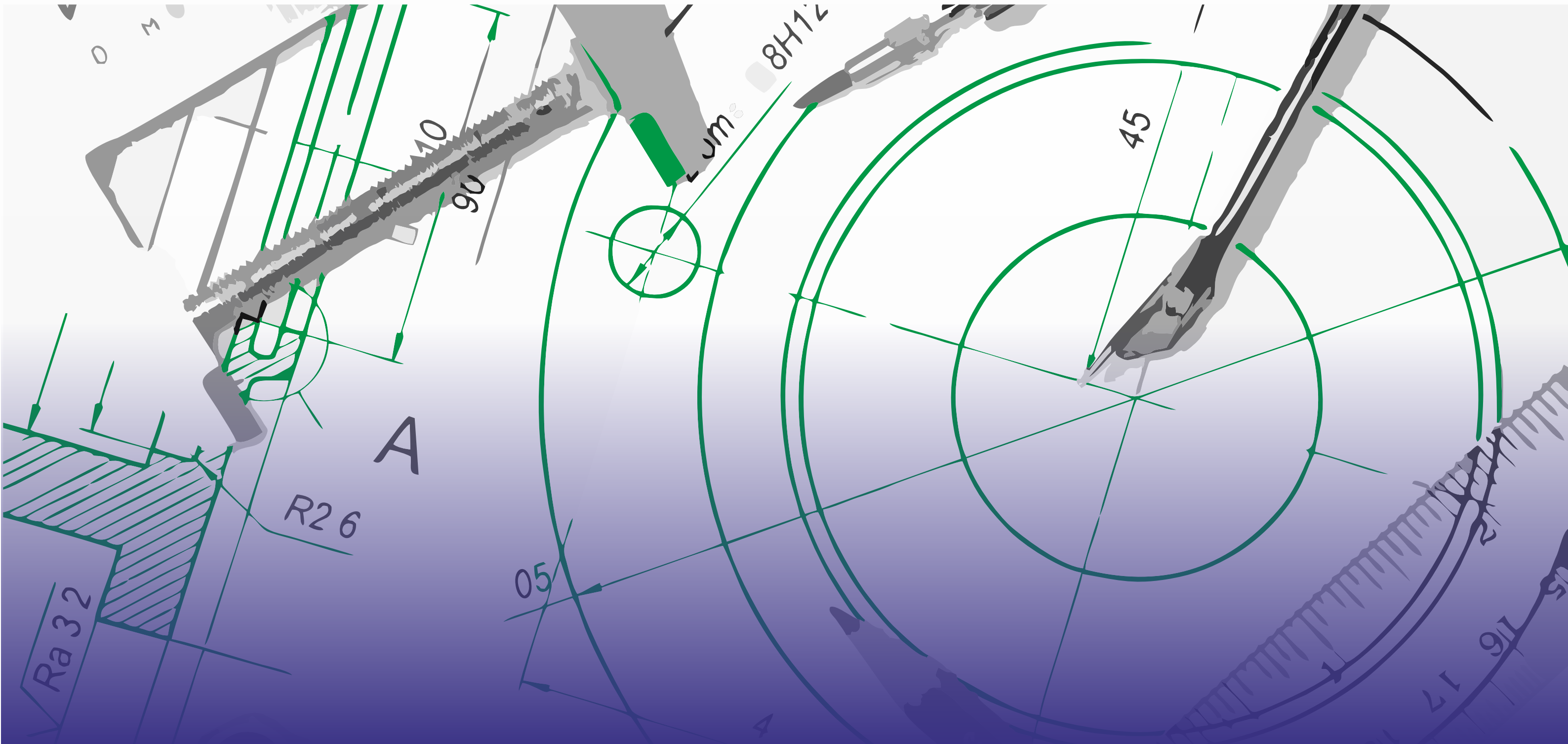
Costel Drăgoi

Metodica rezolvării problemelor de construcții geometrice cu rigla și compasul



Presa Universitară Clujeană

COSTEL DRĂGOI

METODICA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE CONSTRUCȚII GEOMETRICE CU RIGLA ȘI COMPASUL

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2018

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. Ferucio Laurenţiu Ţiplea
Conf. univ. dr. Maria S. Pop

ISBN 978-606-37-0409-3

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro

INTRODUCERE

Problemele de construcție au fost totdeauna un subiect de predilecție în geometrie. Numai cu rigla şi compasul se pot face numeroase construcții, un segment sau un unghi pot fi împărțite în două părți egale, se poate coborâ perpendicular dintr-un punct pe o dreaptă dată, se poate înscrie un hexagon regulat într-un cerc. În toate aceste probleme, rigla e folosită doar ca instrument de trasare a distanțelor. Restricția tradițională la riglă şi compas provine din antichitate, cu toate că grecii nu ezitau să folosească şi alte instrumente. În viziunea geometriei moderne, această restricție se impune, în virtutea căutării unui sistem minimal de instrumente cu ajutorul cărora să efectuăm toate construcțiile posibile. Deşi unele construcții se pot face numai cu rigla, sau numai cu compasul cu anumite precizări specifice.

Una dintre problemele clasice celebre de construcție este aşa numita problemă de contact a lui Apollonius (aproximativ anul 200 e.n.) în care sunt date trei cercuri arbitrare într-un plan şi se cere un al patrulea cerc, tangent celor trei cercuri date. În particular se admite ca unul sau mai multe dintre cercurile date să degenereze într-un punct sau o dreaptă (respectiv un "cerc de rază zero" sau "infinit"). De exemplu, se poate cere să se construiască un cerc tangent la două drepte date, care să treacă printr-un punct dat. În timp ce astfel de cazuri particulare pot fi tratate cu uşurință, problema generală este mult mai dificilă. Dintre toate problemele de construcție aceea a construirii unui poligon regulat cu n laturi, folosind doar rigla şi compasul, prezintă cel mai mare interes. Pentru anumite valori ale lui n, de exemplu n=3, 4, 5, 6, soluția era cunoscută din antichitate şi formează o parte importantă a geometriei învățate în şcoală.

Însă pentru heptagonul regulat (n=7) s-a dovedit că construcția este imposibilă. Mai există trei probleme clasice enunțate de greci, a căror soluție s-a căutat în zadar: trisecțiunea unui unghi arbtrar dat, dublarea unui cub dat (adică găsirea muchiei unui cub al cărui volum să fie egal cu dublul volumului cu muchie dată) şi cvadratura cercului (adică construirea unui pătrat care să aibă aceeaşi arie ca şi un cerc dat).

În toate aceste trei probleme, rigla şi compasul sunt singurele instrumente permise. Problemele nerezolvate de acest fel au dat naştere unora dintre dezvoltările noi şi remarcabile ale matematicii când, după secole de încercări zadarnice de rezolvare, s-a ivit bănuiala că aceste probleme sunt irevocabil nerezolvabile. Astfel, matematicienii au

fost puşi să cerceteze problema: cum se poate demonstra că anumite probleme nu pot fi rezolvate?

În algebră, problema rezolvării ecuaţiilor de grad 5 şi de grad superior a fost cea care a dus la acest nou mod de gândire. În secolul al XVI-lea matematicienii au învăţat că ecuaţiile algebrice de grad trei sau patru pot fi rezolvate printr-un proces asemănător cu metoda elementară de rezolvare a ecuaţiilor pătratice. Toate aceste metode au următoarea caracteristică comună: soluţiile sau "rădăcinile" ecuaţiei pot fi scrise ca expresii algebrice obţinute din coeficienţii ecuaţiei printr-un şir de operaţii fiecare fiind fie o operaţie raţională: adunare, scădere, înmulţire sau împărţire- fie extragerea unei rădăcini pătratice cubice sau de ordinul patru.

Se spune că ecuaţiile algebrice de grad cel mult egal cu patru pot fi rezolvate "prin radicali" (de la cuvântul *radix*, care înseamnă rădăcină în limba latină). Nimic nu părea mai natural extinderea acestui procedeu la ecuaţii de grad cinci sau grad superior, folosind fireşte, radicali de ordin corespunzător. Toate aceste încercări au dat însă greş. Chiar matematicieni distinşi din secolul al XVIII-lea sau înşelat crezând că au găsit soluţia. Abea în primii ani ai secolului al XIX-lea, italianul Ruffini (1765-1822) şi genialul matematician norvegian N. H. Abel (1802-1829) au conceput ideea revoluţionară pe atunci a demonstrării imposibilităţii rezolvării prin radical a ecuaţiei algebrice generale de gradul n. Trebuie să înţelegem limpede că nu se pune problema dacă orice ecuaţie algebrică de gradul n posedă soluţie. Acest fapt a fost demonstrat de Gauss în teza sa de doctorat, în 1799, astfel încât nu există nici o îndoială în privinţa existenţei rădăcinilor ecuaţiei. Menţionăm că aceste rădăcini pot fi găsite prin anumite procedee, cu orice precizie dorită. Arta rezolvării numerice a ecuaţiilor care are o foarte mare importanţă practică, era admisibil elaborată. Dar problema lui Abel şi Ruffini era cu totul deosebită: se poate obţine soluţia doar cu ajutorul operaţiilor raţionale şi al radicalilor? Dorinţa de a obţine o deplină claritate în această problemă a fost aceea care a inspirat dezvoltarea grandioasă a algebrei moderne şi a teoriei grupurilor ale căror baze au fost puse de Ruffini, Abel şi Galois (1811-1832). Problema demonstrării imposibilităţii unei anumite construcţii geometrice dă unul dintre cele mai simple exemple ale acestei tendinţe din algebră.

Folosind noțiunile algebrice, vom fi în măsură să demonstrăm imposibilitatea trisecțiunii unghiului, a construirii heptagonului regulat sau a dublării cubului, doar cu ajutorul riglei şi a compasului (problema cvadraturii cercului este mult mai dificilă).

Punctul nostru de plecare nu va fi problema negativă a imposibilității anumitor construcții, ci mai curând problema pozitivă: cum pot ficaracterizate complet toate problemele ale căror construcții pot fi făcute? După ce am răspuns la această întrebare va fi uşor de arătat că problemele menționate mai sus nu fac parte din această categorie. La vârsta de 17 ani, Gauss a investigat problema construirii "p-goanelor" (poligoanelor cu p laturi) regulate, unde p este un număr prim. Pe atunci construcția era cunoscută doar pentru p=3 şi p=5. Gauss a descoperit că p-gonul regulat este construibil dacă şi numai dacă numărul prim p este un "număr Fermat" de forma

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Când ne ocupăm de construcții geometrice nu trbuie să uităm niciodată că nu se pune problema trasării figuriior în practică, cu un anumit grad de precizie, ci se pune problema dacă soluția poate fi găsită teoretic, folosind numai rigla şi compasul, presupunând că instrumentele sunt de o precizie perfectă. Ceea ce Gauss a demonstrat este faptul că construcțiile lui pot fi efectuate în principiu. Teoria lui nu se referă la efectuare lor pe calea cea mai simplă, sau la găsirea artificiilor care pot fi folosite pentru a simplifica rezolvarea problemei.

CAPITOLUL I

1. Construirea corpurilor şi extragerea rădăcinii pătrate

Pentru a formula ideile noastre generale, vom începe prin examinarea a câtorva construcţii clasice. Cheia unei înţelegeri mai profunde se află în traducerea problemelor geometrice în limbajul algebric. Orice problemă de construcţie geometrică este unul din următoarele tipuri. Se dă o anumită mulţime de segmente, a, b, c, ... şi se cer unul sau mai multe segmente, x, y, ... Totdeauna este posibil să formulăm probleme în acest mod, chiar dacă la prima vedere ele au un aspect cu totul deosebit. Segmentele cerute pot apare ca laturi ale unui triunhgi care trebuie construit, ca raze ale unor cercuri sau cordonate rectangulare ale anumitor puncte. Pentru a simplifica vom presupune că se cere un singur segment x. Construcţia geometrică se reduce atunci la o problemă algebrică, mai întâi trebuie găsim o relaţie între cantitatea căutată x şi cantităţile date a, b, c, ...; apoi trebuie să găsim cantitatea necunoscută x prin rezolvarea acestei ecuaţie şi în sfârşit, trebuie să determinăm dacă această soluţie poate fi obţinută prin procedee algebrice corespunzătoare construcţiilor cu rigla şi compasul. Principiul geometriei analitice, care constă în caracterizarea cantitativă a obiectelor geometrice cu ajutorul numerelor reale, bazată pe introducerea conţinutului numerelor reale, constitue fundamentul întregii teorii.

În primul rând, observăm că unele dintre cele mai simple operaţii algebrice corespund unor construcţii geometrice elementare. Dacă sunt date două segmente cu lungimile a şi b (măsurate cu ajutorul unui segment "unitate" dat) atunci este foarte uşor de construit a+b, a-b, r·a (unde r este un număr raţional oarecare, $\frac{a}{b}$ şi a.b. Pentru a construi pe a+b, trasăm o dreaptă şi pe ea determinăm cu ajutorul compasului distanţele OA = a şi AB = b. Atunci OB= a + b. În mod asemănător, pentru a - b determinând pe AB în sens opus sensului lui OA. Atunci OB = a - b. Pentru a construi pe 3a, adunăm pur şi simplu a + a + a; în mod asemănător construim pe p·a, unite peste un

întreg oarecare. Construim pe a/3 prin artificiul următor, determinând pe OA = a pe o dreaptă şi trasăm o a doua dreaptă prin O.

Pe această dreaptă determinăm un segment arbitrar OC = c, şi construim pe OD = 3 c. Unim pe A cu D şi ducem prin C o dreaptă paralelă cu AD, care intersectează pe OA în B. Triunghiul OBC şî OAD sunt asemenea; deci

Figura 1



Figura 2

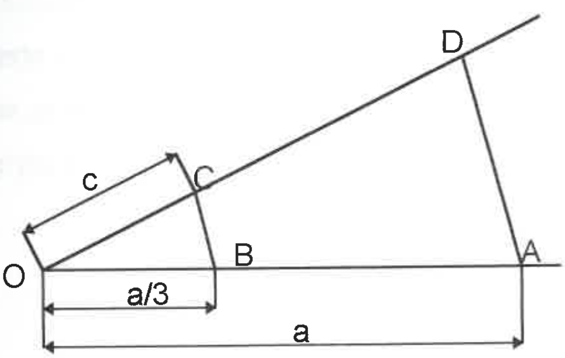


Figura 3

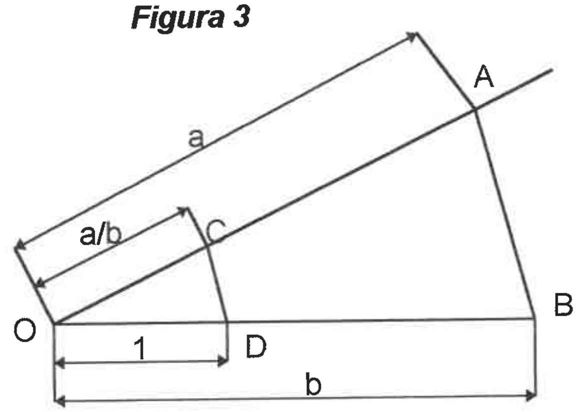
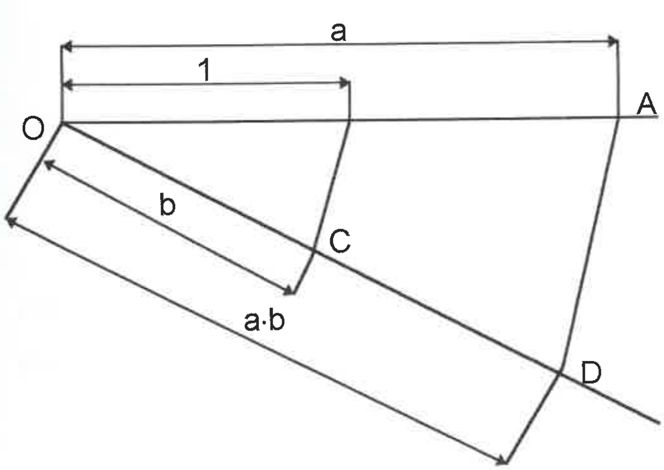


Figura 4



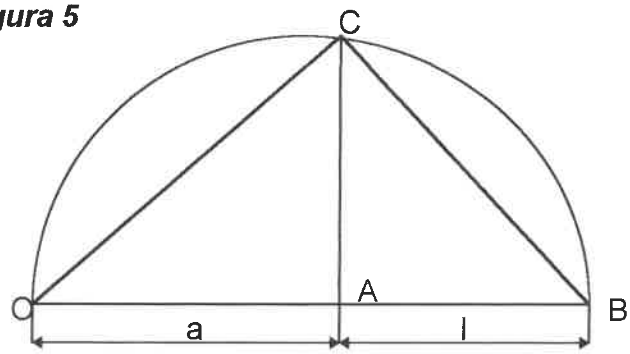
$$\frac{OB}{a} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{3} \quad \text{şi} \quad OB = \frac{a}{3}$$

În acelaşi mod putem construi pe a/q, unde q este un întreg oarecare. Efectuând acestă operație asupra segmentului p·a, putem construi în acest mod pe r•a, unde r = p/q este un număr rațional oarecare. Pentru a construi pe a/b

determinăm pe OB=b şi OA=a pe laturile unui unghi oarecare O, şi pe OB luăm OD=1. Prin D ducem o paralelă la AB, care intersectează pe OA în C. Atunci OC va avea lungimea a/b. Aceste construcţii sunt arătate în figurile 1, 2, 3, 4. Din aceste consideraţii rezultă că operaţiile algebrice "raţionale" adunarea, scăderea, înmulţirea şi înmpărţirea unor cantităţi cunoscute pot fi efectuate cu ajutorul unor construcţii geometrice.

Din orice segmente date, măsurate prin numerele reale a, b, c ....., prin aplicarea succesivă a acestor construcţii simple putem construi orice cantitate exprimabilă în funcţie de a, b, c... într-un mod raţional, adică prin aplicarea repetată a adunării, scăderii, înmulţirii, împărţirii. Totalitatea cantităţilor care pot fi obţinute în acest mod din a, b, c ..... constitue aşa-numitul corp de numere, adică o mulţime de numere, astfel încât orice operaţii raţionale aplicate la două sau mai multe elemente ale mulţimii dau tot un număr al mulţimii. Reamintim că numerele raţionale, numerele reale şi numerele complexe formează astfel de corpuri. In cazul de faţă se spune că corpul este generat de numerele date a, b, c... Construcţia nouă decisivă, care ne scoate din corpul obţinut, este extragerea unei rădăcini pătrate, dacă este dat segmentul a, atunci va putea fi construit deasemenea, folosind doar rigla şi compasul. Pe o dreaptă determinăm pe OA = a şi pe AB = 1. (Fig. 5)

Figura 5



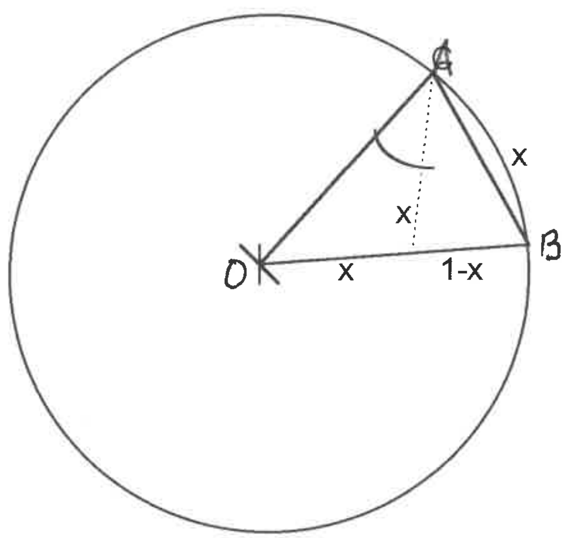
Trasăm un cerc cu diametrul OB şi construim perpendiculara la OB în punctul A, care intersectează cercul în C. Triunghiul OBC are un unghi drept în C, în virtutea teoremei din geometria elementară, care afirmă că un unghi închis într-un semicerc este un

unghi drept. Deci ∢OCA=∢ABC,triunghiurile dreptungice OAC şi CAB sunt asemenea şi pentru x = AC avem $\frac{a}{x}=\frac{x}{1} \Rightarrow x^2=a, x=\sqrt{a}$

2. Poligoane regulate

Să considerăm acum câteva probleme de construcţie puţin mai complicate. Începem cu decagonul regulat. Să presupunem că un decagon regulat este închis într-un cerc de raza 1 (Fig. 6) şi să notăm cu x latura lui. Deoarece x va subântinde un unghi de 36° în centrul cercului, celelalte două unghiuri ale triunghiului mare vor fi, ambele, de 72° şi deci linia punctată care bisectează unghiul A, împarte triunghiul OAB în două triunghiuri isoscele, fiecare având laturile egale, egale cu x. Raza cercului este împărţită în acest mod în segmentele x şi 1-x. Deoarece OAB este asemenea cu triunghiul isoscelmai mic, avem $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$

Figura 6



Din acestă proporţie obţinem ecuaţia pătratică $x^2+x-1=0$ a cărei soluţie este $x=(\sqrt{5}-1)/2$ (Cealaltă soluţie a ecuaţiei este nesemnificativă, deoarece ea dă o valoare negativă pentru x). De aici rezultă că x poate fi construit geometric.

Având segmentul x, putem construi acum decagonul regulat, purtând acest segment de zece ori ca coardă în cerc. Pentagonul regulat poate fi construit acum unind vârfurile decagonului regulat din două în două.

Raportul OB/AB din problema precedentă a fost numit raportul de aur, deoarece matematicienii greci considerau că un dreptunghi, ale cărui laturi se află în acest raport, este cel mai plăcut sub raport estetic. Valoarea lui este aproximativ egală cu 1, 6, 2 .

Dintre toate poligoanele regulate, hexagonul este cel mai uşor de construit. Incepem cu un cerc de raza R; lungimea laturii unui hexagen regulat ~~închis~~ înscris în acest cerc va fi atunci egală cu R. Hexagonul poate fi construit prin purtarea succesivă a unor coarde de lungime R, începând dintr-un puncr oarecare al cercului, până ce se obțin cele şase vârfuri.

Din n-gonul regulat putem obține 2n-gonul regulat împărțind în două părți egale arcul subântins pe cercul circumscris, de fiecare latură a n-gonului şi folosind punctele suplimentare astfel obținute, ca şi vârfurile inițiale, cu vârfuri ale 2n-gonului cerut. începând cu diametrul unui cerc (un "2-gon") putem construi de aceea 4, 8, 16 ....., 2^n-gonul. In mod similar, putem obține 12, 24, 48-gonul e.t.c. pornind de la hexagon şi 20, 40-goanele e.t.c. prnind de la decagon.

Dacă Sn este lungimea laturii n-gonului regulat închis în cercul unitate (cercul de rază 1) atunci latura 2n-gonului are lungimea.

Figura 7

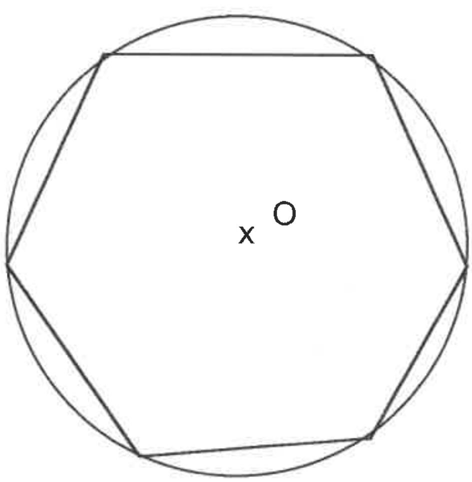
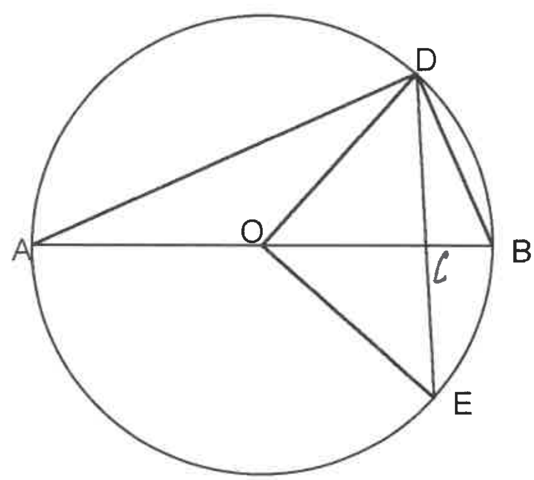


Figura 8



$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

Acest lucru poate fi demonstrat în felul următor. (Fig. 8). Dacă $S_n = DE$, $DE = 2DC$, $S_{2n} = DB$ şi $AB = 2$

$$S_{ABD} = \frac{BD\cdot AD}{2} = \frac{AB\cdot CD}{2},$$

Deoarece $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} \Rightarrow S_n = S_{2n}\sqrt{4 - S_{2n}^2}$

sau $S_n^2 = S_{2n}^2(4 - S_{2n}^2)$.

Rezolvând acestă ~~evoluție~~ ecuație pătratică în raport cu $x = S_{2n}^2$ şi observând că x trebuie să fie mai mic decât 2, găsim cu uşurință formula dată mai sus. Din această formulă şi din faptul că S_4 (latura pătratului) este egală cu $\sqrt{2}$, rezultă că $S_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, şi $S_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $S_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. Ca formulă generală obținem pentru n > 2, $S_{2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2}}}}$ cu n - 1 radicali suprapuşi. Perimetrul 2^n-gonului înscris în cerc este egal cu $2^n \cdot S_{2^n}$. Când n tinde către ifinit 2^n-gonul tintre către cerc. Deci $2^n \cdot S_{2^n}$ tinde spre lingimea circumferinței cercului unitate care ~~rpin~~ prin definiție este egală cu 2π. Astfel înlocuind pe n - 1 cu m şi simplificând cu factorul 2, obținem formula $S^m \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2}}}} \rightarrow \pi$ când $m \rightarrow \infty$. Rezultatele obținute până acum indică următorul fapt careracteristic: laturile 2^n-gonului, ale $5\cdot 2^n$-gonului şi ale $3\cdot 2^n$-gonului pot fi obținute prin adunări, scăderi, înmulțiri împărțiri şi extrageri de rădăcini pătrate.

3. Problema lui Apollonius

O altă problemă de construcție, care devine foarte simplă din punct de vedere algebric, este celebra problemă de contact a lui Apollonius. În contextul nostru, nu este necesar să găsim o construcție deosebit de elegantă. Ceea ce contează aici este faptul că, în principiu, problema poate fi rezolvată doar cu ajutorul riglei şi al compasului. Fie (x_1, y_1), (x_2, y_2) şi (x_3, y_3) coordonatele centrelor vercurilor date, respectiv de raze r_1, r_2 şi r_3. Să notăm cu (x, y) centrul cercului căutat şi cu r raza lui. Atunci condiția ca cercul să fie tangent celor trei cercuri date se obține observând că distanța dintre centrele a două cercuri tangente este egală cu suma sau diferența razelor, după cum cercurile sunt tangente exterior sau interior. Aceasta ne duce la ecuațiile:

(1) $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0$

(2) $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0$

$$(3)\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0$$

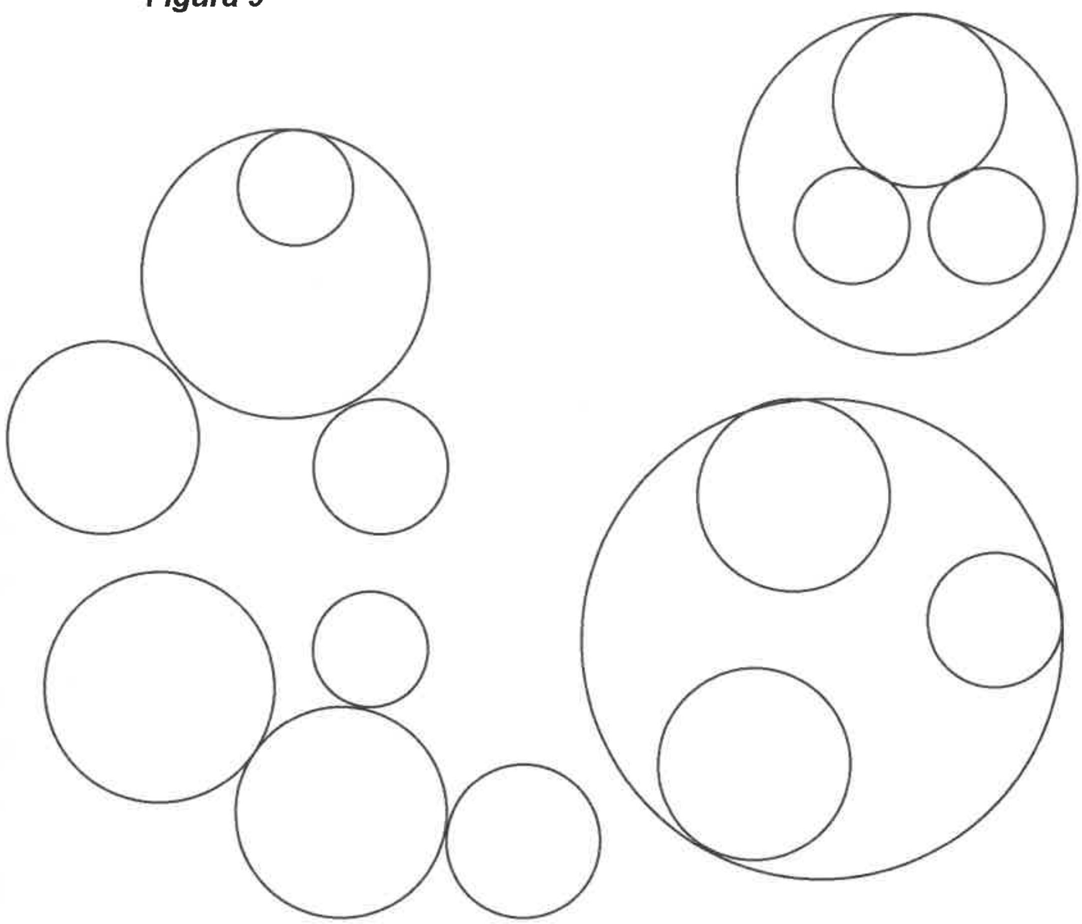
sau la

$$(1')\ x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0$$

$$(2')\ x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_2 - 2yy_2 \pm 2rr_2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 = 0$$

$$(3')\ x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_3 - 2yy_3 \pm 2rr_3 + x_3^2 + y_3^2 - r_3^2 = 0$$

Figura 9



Semnul plus sau minus se alege în fiecare dintre aceste ecuaţii, după cum cercurile sunt tangente interior sau exterior (Figura 9).

Ecuaţiile (1), (2) şi (3) sunt trei ecuaţii pătratice cu trei necunoscute, x, y, r, cu proprietatea că tremenii de gradul doi sunt aceiaşi în fiecare ecuaţie, după cum se vede din formula dezvoltată (1'), (2') şi (3').

Deci, scăzând ecuaţia (2) din (1) obţinem o ecuaţie liniară în x, y, r:

$$(4)\ ax + by + cr = d,$$

unde a = 2 (x_2 - x_1), etc. În mod analog scăzând ecuația (3) din (1) obținem o ecuația liniară

(5) a x + by + cr =d

Rezolvând ecuațiile (4) şi (5) în raport cu x şi y şi substituind valorile găsite în ecuație (1) obținem o ecuație pătratică în raport cu r, care poate fi rezolvată prin operații raționale şi prin extragerea unei rădăcini pătrate. În general, vom avea două soluții la această ecuație, dintre care numai una va fi pozitivă. După ce găsim pe r din această ecuație obținem pe x şi y din cele două ecuații liniare (4) şi (5). Cercul cu centrul (x,y) de rază r va fi tangent celor trei cercuri date. În procesul dezvoltării am folosit doar operații raționale şi extrageri de rădăcini pătrate. Rezultă că r, x şi y pot fi construite doar cu ajutorul riglei şi a compasului. În general vom avea opt soluții ale problemei lui Apollonius, corespunzătoare celor 2 x 2 x 2 = 8 combinări posibile ale semnelor + şi - în ecuațiile (1), (2) şi (3). Aceste alegeri corespund condițiile cu cercurile cerute să fie tangente în exterior sau interior fiecăruia dintre cele trei cercuri date. Se poate întâmpla ca procesul nostru algebric să nu dea valori reale pentru x, y şi r. Acest lucru se va întâmpla, de exemplu dacă cele trei cercuri date sunt concentrice, asfel încât nu există nici o soluție a problemei geometrice.

De asemenea ne putem aştepta la "degenerări" ale soluției, ca în cazul în care cle trei cercuri date degenerează în trei puncte colinioare. Atunci ~~arcul~~ cercul lui Apollonius degenerează în aceeaşi dreaptă.

CAPITOLUL II. NUMERE CONSTRUIBILE ŞI CORPURI DE NUMERE

1. Teoria generală

Discuţia noastră precedentă indică fundamentul algebric general al construcţiilor geometrice. Orice construcţie cu rigla şi compasul constă dintr-un şir de paşi, fiecare fiind ~~unul~~ de unul din următoarele tipuri:

1) trasarea unei drepte prin două puncte,

2) aflarea intersecţiei a două drepte,

3) trasarea unui cerc de rază dată, cu centrul într-un punc dat,

4) aflarea punctelor de intersecţie ale unui cerc cu un alt cerc sau cu o dreaptă.

Un element (punct, dreaptă sau cerc) se consideră a fi cunoscut, dacă a fost dat de la început, sau dacă a fost construit într-unul din paşii precedenţi. Pentru o analiză teoretică putem raporta întreaga construcţie la un sistem de coordonate x, y. Elementele date vor fi reprezentate atunci prin puncte sau segmente în planul x, y. Dacă de la început este dat un singur segment, atunci îl putem lua ca unitate de lungime, ceea ce fixează punctul x =1, y = 0. Uneori apar elemente "arbitrare": se trasează drepte arbitrare, se aleg puncte sau raze arbitrare. (Un exemplu de element arbitrar de acest fel apare la construcţia mijlocului unui segment; trasăm două cercuri de raze egale, dar arbitrare, cu centrul în fiecare extremitate a segmentului şi unim punctele lor de intersecţie). În asfel de cazuri, putem alege elementul în aşa fel încât el să nu fie raţional; adică putem alege puncte arbitrare cu coordonate raţionale x, y drepte arbitrare a x + by +c = 0 cu coeficienţi raţionali a, b, c, cercuri arbitrare, ale căror centre au coordonate raţionale şi care au raze raţionale. Vom face o astfel de alegere a elementelor arbitrare raţionale peste tot; dacă elementele sunt într-adevăr arbitrare, aceaşta restricţie nu poate influenţa rezultatul unei construcţii. Pentru simplificare, vom presupune în discuţia ce urmează că, de la început, este dat un singur element, unitate de lumgime 1. Atunci, în concordanţă cu Capitolul I putem construi cu ajutorul riglei şi a compasului toate numerele, care pot fi obţinute din unitate prin procesele raţionale de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire, adică toate numerele raţionale a/b unde a şi b sunt întregi. Sistemul numerelor raţionale este "închis" în raport cu operaţiile raţionale; adică suma, di-

ferența, produsul sau câtula două numere raționale - excluzând împărțirea cu zero, ca de obicei este un număr rațional. Orice mulțime de numere, care are această proprietate de închidere în raport cu cele patru operații raționale se numeşte corp de numere.

Pornind de la unitate, putem construi astfel întregul corp al numerelor raționale şi deci toate punctele raționale (adică punctele care au ambele coordonate raționale) din planul x, y. Putem obține noi numere iraționale folosind compasul, pentru a construi; depildă numărul $\sqrt{2}$, care după câte ştim nu se află în corpul rațional. După ce am găsit pe $\sqrt{2}$ putem găsi prin construcțiile "raționale" toate numerele de forme.

(1) $a + b\sqrt{2}$

unde a,b sunt numere raționale şi de aceea şi ele sunt construibile. De asemenea, putem construi toate numerele de forma

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} sau (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}),$$

unde a, b, c, d sunt raționale. Aceaste numere pot fi scrise însă întodeauna sub forma (1), deoarece avem

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \cdot \frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} = p+q\sqrt{2},$$

unde p, q sunt raționale (Numitorul c^2-2d^2 nu poate fi nul, deoarece dacă $c^2-2d^2=0$, atunci $\sqrt{2}=\frac{c}{d}$, contrar faptului că $\sqrt{2}$ este irațional). De asemenea $(a+b\sqrt{2}).(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2} = r+s\sqrt{2}$, uneşte r, s sunt raționale. Prin urmare tot ceea ce obținem prin construirea lui $\sqrt{2}$ este mulțimea numerelor de forma (1), cu numerele raționale a, b arbitrare

Exerciții:

Din $p=1+\sqrt{2}$, $q=2-\sqrt{2}$, $r=-3+\sqrt{2}$ obținem numerele:

$\frac{p}{q}$; $p+p^2$; $(p-p^2).\frac{q}{r}$;; $\frac{p.q.r.}{1+r^2}$; $\frac{p.q.r.}{2+p.r^2}$

sub forma (1)

Aceste numere (1) formează din nou un corp, după cum rezultă discuția precedentă. (Faptul că suma şi diferența a două numere de forma (1) este tot un număr de

forma (1) este evidentă). Acest corp este mai cuprinzător decât corpul rațional, care este o parte, sau un subcorp al său. Insă, desigur, este mai mic decât corpul tuturor numerelor reale. Să notăm corpul rațional cu F_0și noul corp al numerelor de forma (1) cuF_1. Faptul că orice număr din "corpul extins" F_1 poate fi construit a fost stabilit. Putem extinde acum domeniul contrucțiilor noastre luând, de exemplu un număr din F_1, ca de pildă $K = 1+\sqrt{2}$ extrăgând rădăcina pătrată și obținând în acest mod numărul construibil

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} = \sqrt{K}$$

o dată cu el, obținem corpul format din toate numerele de forma

(2) $p+q\sqrt{K}$

unde acum p și q pot fi numere arbitrare din F_1, adică numere de forma $a+b\sqrt{2}$, unde a, b se află în F_0, adică sunt raționale

Exerciții: Reprezentați numerele

$$\left(\sqrt{K}\right)^3; \quad \frac{1+\left(\sqrt{K}\right)^2}{1+\sqrt{K}}; \quad \frac{\sqrt{2}.\sqrt{K}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{K}\right)^3-3}; \quad \frac{\left(1+\sqrt{K}\right).\left(2-\sqrt{K}\right).\left(\sqrt{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{K}}}{1+\sqrt{2}.K}.$$

sub forma (2)

Toate aceste numere au fost construite pe baza ipotezei că, de la început, a fost dat un singur segment. Dacă sunt date două segmente, putem alege pe unul din ele ca unitate de lungime. Să presupunem că, față de această unitate, lungimea celuilat segment este egal cu L. Atunci putem construi corpul G format din toate numerele de forma.

$$\frac{a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1}+.....+a_1\alpha + a_0}{b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1}+.....+b_1\alpha + b_0}$$

unde numerele a_0, ..., a_m și b_o, ..., b_n sunt raționale, iar m și n sunt întregi pozitivi arbitrari.

Exercițiu: Dacă sunt date două segmente de lungimi 1 șiα, indicați construcțiile efective necesare pentru obținerea numerelor: 1 + α + α^2; (1+ α) / (1-α); α^3

Să presupunem acum, mai general, că suntem în stare să construim toate numerele unui corp numeric F. Vom arăta că că folosind doar rigla nu vom ieşi niciodată

din corpul F; ecuaţia dreptei care trece prin toate punctele de coordonate a_1, b_1 şi a_2, b_2, luate din corpul F_1 este: $(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

Coeficienţii ei sunt expresii raţionale formate cu numere din F, şi deci, din definiţia corpului sunt şi ei în F. Mai mult dacă avem două drepte

$$x + \beta y - \gamma = 0 \text{ şi}$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma = 0,$$

cu coeficienţii în F, atunci coordonatele punctului lor de intersecţie, aflate prin rezolvarea sistemului corespunzător de ecuaţii, sunt

$$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\lambda'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}; y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

Deoarece şi acestea sunt nume din F, este limpede că folosind doar rigla nu putem ieşidin corpul F.

Exerciţii: Dreptele $x + \sqrt{2}y - 1 = 0; 2x - y + \sqrt{2} = 0$ au coeficienţii în corpul (1). Calculaţi coordonatele punctului de intersecţie şi verificaţi faptul că ele sunt de forma (1). Uniţi punctele $(1, \sqrt{2})$ şi $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ printr-o dreaptă $ax + by + c = 0$ şi verificaţi faptul că coeficienţii sunt de forma (1). Faceţi acelaşi lucru în raport cu corpul (2) pentru dreptele;

$\sqrt{1+\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2}\,y + 1$

$(1 + \sqrt{2})x - y = 1 - \sqrt{1+\sqrt{2}}$ şi pentru punctele $(\sqrt{2}, -1)$; $(1 + \sqrt{2}; \sqrt{1+\sqrt{2}})$

Putem ieşi din limitele lui F numai prin folosirea compasului. În acest scop, alegem un element K al lui F, asfel încât $\sqrt{K}$ să nu se afle în F.

Atunci putem construi pe $\sqrt{K}$ şi de aceea, putem construi toate numerele de forma

(3) $a + b\sqrt{K}$

unde a şi b sunt raţionale, sau chiar elemente arbitrare a lui F.

Suma şi diferenţa a două numere de forma $a + b\sqrt{K}$ şi $c + d\sqrt{K}$, produsul lor $(a + b\sqrt{K}) \cdot (c + d\sqrt{K}) = (ac + kbd) + (ad + bc)\sqrt{K}$ şi câtul lor sunt tot de forma $p + q\sqrt{K}$, unde p şi q sunt numere din F. (Numitorul $c^2 - Kd^2$ nu se poate anula, decât dacă c şi d sunt ambii nuli; într-adevăr, în caz contraripotezei după care $\sqrt{K}$ nu se află în F).

Deci, mulţimea numerelor de forma $a+b\sqrt{K}$ formează un corp F. Corpul F conţine corpul iniţial F, deoarece putem alege în particular b=o. F^1 se numeşte o extindere a corpului F, iar F se numeşte subcorpal corpului F.

Ca exemplu, fie F corpul format din numerele $a+b\sqrt{2}$ unde a şi b sunt numere raţionale şi să luăm $K=\sqrt{2}$. Atunci numerele extinderii F sunt reprezentate de $p+q\sqrt[4]{2}$, unde p şi q se află în F, $p=a+b\sqrt{2}, q=a+b\sqrt{2}$, cu a, b, a, b raţionale. Orice număr din F^1 poate fi adus la această formă.

De exemplu:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2}-\frac{2+\sqrt{2}}{4-2}\cdot\sqrt[4]{2}=$$

$$=(1+\sqrt{2})-(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})\cdot\sqrt[4]{2}$$

Am văzut că dacă pornim de la orice corp F de numere construibile care conţine numărul K, atunci prin folosirea riglei şi printr-o singură aplicare a compasului, putem construi pe $\sqrt{K}$ şi deci orice număr de formă $a+b\sqrt{K}$, unde a şi b sunt numere din F.

Să arătăm acum că reciproc, printr-o singură aplicare a compasului, putem obţine numai numere de această formă. Intr-adevăr ceea ce realizează compasul într-o construcţie este tocmai definirea punctelor (sau a coordonatelor lor) cu puncte ale intersecţiei unui cerc cu o dreaptă sau cu un cerc. Un cerc de centru ξ, N şi de rază r are ecuaţia

$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2$ deci dacă ξ, η, R sunt în F, ecuaţia cercului poate fi scrisă sub forma:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

cu coeficienţii α, β, γdin F. O dreaptă

$$ax+by+c=0$$

care uneşte două puncte, ale căror coordonate se află în F, are coeficienţii a, b, c în F. Eleminând pe y din acest sistem, obţinem pentru abscisa unui punct de intersecţie a celui cu dreapta o ecuaţie pătratică de forma:

$$Ax^2+Bx+C=0$$

cu coeficienții A, B, C, în F. (In mod explicit $A = a^2 + b^2$, B = 2(ac + $b^2\alpha$ - abβ), C= c^2 - 2bcβ + $b^2\gamma$

Soluția este dată de formula:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Care este de forma p+q $\sqrt{K}$, cu p, q, k din F. O formulă asemănătoare este adevărată pentru ordonata unui punct de intersecție. Dacă însă avem două cercuri

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' = 0$$

atunci, scăzând a doua ecuație din prima, obținem ecuația liniară

$$2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + \gamma - \gamma' = 0$$

Care poate fi rezolvată împreună cu ecuația primului cerc, ca şi mai înainte. In ambele cazuri, construcția furnizează cele două coordonate din noilor puncte şi aceste noi cantități sunt de forma $p + q\sqrt{K}$, cu p, q, K din F. În particular, desigur, $\sqrt{K}$ poate aparține el însuşi lui F, ca de pildă când K = 4. Atunci construcția nu dă esențial nimic nou, şi rămânem în F. Dar în general, lucrurile nu se vor petrece în acest fel.

Exerciții: considerați cercul de rază $2\sqrt{2}$, cu centrul în origine şi dreapta care trece prin punctele $(\frac{1}{2}, 0), (4\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Găsiți corpul F' determinat de coordonatele punctelor de intersecție ale cercului şi ale dreptei. Faceți acelaşi lucru pentru intersecția cercului dat cu cercul de rază $\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi de centru (0, $2\sqrt{2}$). Rezumând, dacă de la început sunt date anumite cantități, atunci doar cu ajutorul riglei putem construi toate cantitățile din corpul F, generat prin operații raționale efectuate cu cantitățile date. Folosind compasul, putem extinde apoi corpul F al cantităților construibile, obținând o extindere a corpului dat, mai largă, alegând un număr K din F, extrăgând rădăcina pătrată din K, şi construind corpul F format din numerele $a + b\sqrt{K}$, unde a şi b se află în F; F se numeşte subcorp al corpului F', toate cantitățile din F se află, de asemenea, în F', deoarece în expresia $a + b\sqrt{K}$ putem alege b = 0 (presupunem că $\sqrt{K}$ este un nou număr, care nu

se află în F, deoarece în caz contrar procesul adjuncționării lui $\sqrt{K}$ nu ne-ar da nimic nou, şi F' ar fi identic cu F).

Am arătat că orice pas efectuat într-o construcție geometrică (trasarea unei drepte prin două puncte cunoscute, trasarea unui cerc cu centru cunoscut şi de rază dată, sau intersectarea a două drepte sau cercuri cunoscute) va produce fie noi cantități aflate în corpul despre care ştim că este format din numere construibile sau prin construirea unei rădăcini pătrate, va produce o nouă extindere a corpului numerelor construibile.

Mulțimea tuturor numerelor construibile poate fi descrisă acum în mod precis. Începem cu un corp dat F_0, definit prin cantitățile date de la început, de pildă corpul numerelor raționale, dacă este dat un singur segment, luat ca unitate de lungime. Apoi, prin "adjuncționarea" $\sqrt{K}_0$, unde K_0 se află în F_0, dar $\sqrt{K}_0$ nu se află în F_0, construim o extindere F_1 a numerelor construibile, formată din toate numerele de forma $a_0 + b_0\sqrt{K}_0$, unde a_0 şi b_0 pot fi numere oarecare din F_0. Atunci F_2, o nouă extindere a corpului F_1, este definită de numerele $a_1 + b_1\sqrt{K}_1$, unde a_1 şi b_1 sunt numere arbitrare din F_1, iar K_1 este un număr din F_1, a cărui rădăcină pătrată nu se află în F_1. Repetând acest procedeu, vom obține un corp F_n, după "adjuncționarea" a n rădăcini pătrate.

Numerele construibile sunt acelea şi numai acelea, care pot fi obținute printr-un astfel de şir de extinderi, adică acelea care se află într-un corp F_n de tipul descris. Mărimea numărului n de extinderi necesare nu are importanță; într-o oarecare măsură el măsoară gradul de complexitate a problemei. Exemplu următor ilustrează procedeul.

Dorim să obținem numărul:

$$\sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}$$

Fie F_0 corpul rațional. Punând $K_0 = 2$, obținem corpul F_1, care conține numărul $1+\sqrt{2}$. Acum luând $K_1 = 1+\sqrt{2}$ şi $K_2 = \sqrt{3}$.

De fapt, 3 se află în corpul inițial F_0, şi deci a fortiori în corpul F_2, astfel încât este permis să luăm $K_2 = 3$. Apoi luăm $K_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$. Şi în sfârşit $K_4=$ $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5$. Corpul F_5 astfel construit conține numărul dorit, pentru că $\sqrt{6}$ se află în F_5, dat fiind că $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ şi deci produsul lor, se află în F_3, deci se află în F_5.

CAPITOLUL III

1. Nerezolvabilitatea celor trei probleme greceşti

Să considerăm mai întâi problema dublării cubului. Dacă cubul dat are o muchie de lungime unitate, volumul său va fi egal cu unitatea de volum, se cere să găsim muchia x a unui cub, de volum dublu. De aceea, muchea x va satisface ecuația cubică simplă.

(1) $x^3 - 2 = 0$

Demonstrația faptului că acest număr nu poate fi construit doar cu rigla şi compasul este indirectă. Vom încerca să presupunem că este posibilă o construcție. Conform discuție precedente, aceasta înseamnă că x se află într-un corp F_K, obținut ca mai sus din corpul rațional prin extinderi succesive, efectuate prin "adjuncționarea" unor rădăcini pătrate. După cum vom arăta, această ipoteză duce la o consecință absurdă.

Ştim deja că x nu se poate afla în corpul rațional F_0, pentru că $\sqrt[3]{2}$ este un număr irațional. Deci x se poate afla în numai într-o extindere F_K, unde K este un întreg pozitiv. Tot atât de bine putem presupune că K este cel mai mic întreg pozitiv, astfel încât x se află într-un F_K. Rezultă că x poate fi scris sub forma $x = p + q\sqrt{w}$, unde p, q şi w aparțin unei F_{K-1}, dar $\sqrt{w}$ nu-i aparține. Acum, printr-un raționament algebric simplu dar important, vom arăta că dacă $x = p + q\sqrt{w}$ este o soluție a ecuației cubice (1), atunci $y = p - q\sqrt{w}$ este de asemenea o soluție. Deoarece x se află în corpul F_k, x^3 şi x^{3-2} se află de asemenea în F_K şi avem:

(2) $x^3 - 2 = a + b\sqrt{w}$,

unde a şi b se află în F_{K-1}. Printr-un calcul simplu putem arăta că $a=p^3+3pq^{2w}-2$; $b=3p^2q+q^{3w}$. Dacă punem $y = p - q^{\sqrt{w}}$ atunci înlocuim pe q prin -q în aceste expresii ale lui a şi b, obținem.

(2') $y^3 - 2 = a - b\sqrt{w}$

Dar x a fost prin ipoteză, o rădăcină a ecuație $x^3-2=0$, deci

(3) $a + b\sqrt{w} = 0$

Aceasta implică -şi aici este cheia raţionamentului- că a şi b trebuie să fie ambele nule. Dacă b nu ar fi nul, am deduce din (3) că $\sqrt{w} = \frac{-a}{b}$. Dar atunci $\sqrt{w}$ ar fi un număr al corpului F_{K-1}, în care se află a şi b, contrar ipotezei noastre. Deci b=0, şi din (3) rezultă imediat că a=0. Acum după ce am arătat că a=b=0, din (2') deducem imediat că $p-q^{\sqrt{w}}$ este de asemenea o soluţie a ecuaţiei cubice (1), deoarece y^3-2=0.

Mai mult, y ≠ x, adică x - y ≠ 0, pentru că $x-y=2q^{\sqrt{w}}$ se poate anula numai dacă q = 0, şi dacă ar fi aşa, atunci x = p s-ar afla în F_{k-1}, contrar ipotezei noastre. Am arătat deci că dacă $x=p+q^{\sqrt{w}}$ este o rădăcină a ecuaţiei cubice (1) atunci $y=p-q^{\sqrt{w}}$ este o rădăcină diferită a aceleiaşi ecuaţii. Aceasta duce imediat la o contradicţie, deoarece există un singur număr real x care este rădăcina cubică a lui 2, celelalte rădăcini cubice ale lui 2 fiind imaginare; $y=p-q^{\sqrt{w}}$ este în mod evident real, deoarece p, q şi $\sqrt{w}$ erau reale.

Astfel, ipoteza noastră iniţială a dus la o absurditate şi deci am dovedit că este falsă; o soluţie a ecuaţiei (1) nu se poate afla într-un corrp F_K, astfel încât dublarea cubului cu ajutorul riglei şi a compasului este imposibilă.

2. O teoremă asupra ecuaţiilor cubice

Raţionamenul algebric final era adaptat în mod special problemei particulare de care ne ocupăm. Dacă vrem să tratăm celelalte două probleme greceşti, este de dorit să ne bazăm pe o teoremă mai generală. Din punct de vedere algebric, toate cele trei probleme depind de rezolvarea ecuaţiilor cubice. Pe baza unui rezultat fundamental referitor la ecuaţia cubică

(4) $$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

dacă x_1, x_2, x_3 sunt cele trei rădăcini ale acestei ecuaţii, atunci

(5) $$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

Polinomul $z^3 + az^2 + bz + c$ poate fi descompus în factori sub forma produsului $(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei (4). Deci

$z^3 + az^2 + bz + c = z^3 - (x_1 + + x_2 + x_3)z^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)z - x_1x_2x_3$, astfel, deoarece coeficientul fiecărei puteri a lui z trebuie să fie acelaşi în ambii membrii, deducem:

$$-a = x_1 + + x_2 + x_3,\ b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \text{ şi } c = - x_1x_2x_3$$

Să considerăm o ecuaţie cubică (4) în care coeficienţii a, b, c sunt numere raţionale. Se poate ca una dintre rădăcinile ecuaţiei să fie raţională; de exemplu, ecuaţia $x^3 - 1 = 0$ are rădăcina raţională -1, în timp ce celelalte două rădăcini date de ecuaţia pătratică

$$x^2 + x + 1 = 0$$

sunt imaginare. Putem demonstra însă cu uşurinţă teorema generală:

Teoremă: Dacă o ecuaţie cubică cu coeficienţi raţionali nu are rădăcini raţionale, atunci nici una din rădăcinile ei nu poate fi construită de la corpul raţional F_0.

Demonstraţia va fi dată ca şi mai înainte printr-o metodă indirectă. Să presupunem că x este o rădăcină construibilă a ecuaţiei (4). Atunci x s-ar afla în ultimul corp F_k al unui şir de extinderi $F_0, F_1, ..., F_K$ ca mai sus. Putem presupune că numărul k este cel mai mic întreg, astfel încât o rădăcină a ecuaţiei cubice (4) se află într-o extindere F_K. Desigur, k trebuie să fie mai mare decât 0, deoarece în enunţul teoremei se presupune că nici o rădăcină x nu se află în corpul raţional F_0. Deci x poate fi scris sub forma

$$x = p + q^{\sqrt{w}}$$

unde p, q, w, se află în corpul precedent F_{K-1}, dar $\sqrt{w}$ nu se află în acest corp. Rezultă că şi pentru ecuaţia particulară $z^3 - 2 = 0$, că un alt număr din F_K şi anume $y = p - q^{\sqrt{w}}$ va fi de asemenea o rădăcină a ecuaţiei (4). Ca şi mai înainte, vedem că $q \neq 0$, şi deci $x \neq y$.

Din (5) rezultă că a treia soluţia a ecuaţiei (4) este dată de u = -a -x -y.

Dar, deoarece x + y = 2p, acesta înseamnă că

$$u = -a - 2p$$

din care $\sqrt{w}$ a dispărut, astfel încât u este un număr din corpul F_{K-1}. Acest fapt contrazice ipoteza că numărul k este cel mai mic număr, astfel încât un F_K conţine o rădăcină a ecuaţiei (4). Prin urmare, ipoteza este absurdă şi nici o rădăcină a ecuaţiei (4) nu se poate afla într-un astfel de corp F_K. Teorema generală este demonstrată. Pe

baza acestei teoreme se dovedeşte că este imposibilă construirea unei soluţii doar cu ajutorul riglei şi al compasului, dacă echivalentul algebric al problemei este rezolvarea unei ecuaţii cubice care nu are rădăcini raţionale. Această echivalenţă a fost evidentă pentru problema dublării cubului, iar acum va fi stabilită pentru celelalte două probleme greceşti.

3. Trisecţiunea unghiului

Vom demonstra că trisecţiunea unghiului, numai cu ajutorul riglei şi al compasului, este imposibilă în general. Desigur, există unghiuri ca de pildă cele de 90° şi 180° pentru care trisecţiunea poate fi efectuată. Ceea ce trebuie să demonstrăm este faptul că trisecţiunea nu poate fi efectuată printr-un procedeu valabil pentru orice unghi. Pentru demonstraţie este suficient să indicăm un singur unghi care nu poate fi trisecţionat, deoarece o metodă general valabilă ar trebui să fie aplicabilă fiecărui caz particular, prin urmare, inexistentă unei metode generale va fi demonstrată dacă putem demonstra de exemplu că unghiul de 60° nu poate fi trisecţionat numai cu ajutorul riglei şi al compasului. Putem obţine un echivalent algebric al acestei probleme în diferite moduri, cel mai simplu este să presupunem că unghiul θ este dat prin cosinusul său:

$\cos\theta$ = g. Atunci problema este echivalentă cu aceea a găsirii cantităţii x = $\cos\frac{\theta}{3}$. Dintr-o formulă trigonometrică simplă, cosinusul lui $\frac{\theta}{3}$ este legat de cosinusul lui θ prin egalitatea:

$$\cos\theta = g = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

cu alte cuvinte, problema trisecţiunii unghiului θ cu $\cos\theta$=g, se reduce la cosntruirea unei soluţii a ecuaţiei cubice

(6) $4z^3 - 3z - g = 0$

Pentru a arăta că acest lucru nu poate fi făcut în general, luăm θ= 60°, astfel încât

$g = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Ecuaţia (6) devine atunci

(7) $8z^3 - 6z = 1$

În virtutea teoremei demonstrate în secțiunea precedentă, trebuie să arătăm că această ecuație nu are rădăcini raționale. Fie v = 2z. Atunci ecuația devine

(8) $v^3 - 3v = 1$

Dacă ar exista un număr rațional $v = \frac{r}{s}$, care satisface această ecuație, unde r şi s sunt întregi relativ primi ar trebui să avem

$r^3 - 3s^2r = s^3$. De aici rezultă că $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ se divide cu r, ceea ce înseamnă că r şi s au un factor comun, cu excepția cazului în care $r = \pm 1$. De asemenea, s^2 este un divizor al lui $s^3 = s^2(s + 3r)$, ceea ce înseamnă că r şi s au un divizor comun, cu excepția cazului în care $s = \pm 1$. Deoarece am presupus că r şi s nu au divizori comuni, am arătat că singurele numere raționale care ar putea satisface ecuația (8) sunt =1 sau -1. Substituind pe +1 şi pe -1 în locul lui v în ecuația (8), şi prin urmare ecuația (7), nu are rădăcini raționale, ceea ce demonstrează imposibilitatea trisescțiunii unghiului.

4. Heptagonul regulat

Să considerăm acum problema găsirii laturii x a unui heptagon regulat, înscris în cercul unitate. Cel mai simplu mod de rezolvare foloseşte numerele complexe. Ştim că vârfurile heptagonului regulat sunt date de rădăcinile ecuației

(9) $z^7 - 1 = 0$

coordonatele x, y, ale vârfurilor fiind considerate ca părți reale şi imaginare ale numerelor complexe z = x + iy. O rădăcină a acestei ecuații este z = 1, iar celelalte sunt rădăcinile ecuației

(10) $$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

obținute din (9) prin simplificarea cu factorul z - 1. Împărțind ecuația (10) prin z^3, obținem ecuația

(11) $$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

Printr-o transformare algebrică simplă, aceasta poate fi scrisă sub forma

(12) $$(z + \frac{1}{z})^3 - 3(z + \frac{1}{z}) + (z + \frac{1}{z})^2 - 2 + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0$$

Notând cantitatea $z+\frac{1}{z}$ cu y, găsim din (12) că

(13) $$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Ştim că z, rădăcina de ordinul 7 a unităţii, este dată de

(14) $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

unde $\varphi = 360°/7$ este unghiul subîntins în centrul cercului de latura heptagonului regulat, de asemenea ştim că

$\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, astfel încât

$y = z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$

Dacă putem construi pe y, atunci putem construi şi pe cos φ şi reciproc. Deci, dacă putem demonstra că y nu este construibil, vom arăta în acelaşi timp că z, şi deci heptagonul nu este cosntruibil. Astfel, construind teorema din secţiunea 2, rămâne să arătăm doar că ecuaţia (13) nu are rădăcini raţionale şi acest lucru se demonstrează în mod indirect. Să admitem că ecuaţia (13) are o rădăcină raţională r/s, unde r şi s sunt întregi care nu au nici un factor comun. Atunci avem

(15) $$r^3 + r^2s - 2rs^2 - s^3 = 0$$

De unde ca şi mai sus, vedem că r^3 are factorul s, iar s^3 are factorul r. Deoarece r şi s nu au nici un factor comun, fiecare trebuie să fie egal cu ±1; de aceea, y poate avea numai valorile + 1 şi - 1, dacă este raţional. Substituind aceste numere în ecuaţie, vedem că nici unul dintre ele nu o satisface. Deci y şi, prin urmare, latura heptagonului regulat, nu sunt construibile

5. Observaţii asupra problemei cvadraturii cercului

Am reuşit să rezolvăm problemele dublării cubului, trisecţiunii unghiului şi construcţiei heptagonului regulat prin metode destul de elementere.

Problema cvadraturii cercului este mult mai dificilă şi necesită tehnica analizei matematice avansate.

Deoarece un cerc de rază r are aria egală cu πr^2, problema construirii unui pătrat cu o arie egală cu aceea a unui cerc dat, a cărui rază este egală cu unitatea de

lungime, se reduce la cosnstruirea unui segment de lungime $\sqrt{\pi}$, ca latură a pătratului căutat. Acest segment va fi construibil dacă şi numai dacă numărul π este construibil. În lumină caracterizării noastre generale a numerelor construibile, am putea demonstra imposibilitatea cvadraturii cercului, arătând că numărul π nu poate fi construit în nici un corp F_K care poate fi obţinut prin "adjuncţionări" succesive ale rădăcinilor pătrate la corpul raţional F_0. Deoarece toate elementele unui astfel de corp sunt numere algebrice, adică numere care satisfac ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi, va fi suficient să arătăm că numărul π nu este algebric, adică este transcendent. Aparatul tehnic pentru demonstrarea faptului că π este un număr transcendent a fost creat de Charles Hermite (1822- 1905), care a demonstrat că numărul este transcendent. Printr-o uşoară extindere a metodei lui Hermite, F. Lindemann a reuşit (1822) să demonstreze transcendenţa lui π, rezovând astfel definitiv problema milenară a cvadraturii cercului.

6. Scurt istoric

Problema dublării cubului sau problema "din Delos" are o origine fabuloasă. Se spune că locuitorii din insula Delos au întrebat Pithya din Delphi ce trebuie să intreprindă pentru a fi izbăviţi de molima ciumei, care pustia pe atunci insula. Pithya a ordonat să se îndoiască altarul de aur din templul vestit pe care Apollon îl avea în insulă. Grecii, cu spiritul lor de rigoare, au înţeles să dubleze exact altarul, şi au încredinţat problema geometrilor de pe atunci. Calculul numeric la greci înveşmânta forme geometrice. "Calculat" însemna la ei "construit cu rigle şi compasul".

Mirarea şi teama lor va fi fost mare, când au văzut că problema pe care le-a propus-o Pithya îi depăşeşte. Toate sforţările lor de a dubla cubul altarului cu linia şi compasul s-au dovedit zadarnice. Problema a fost preluată de Academii şi considerată ca relevând o geometrie superioară. Pentru a o soluţiona, Platon inventează doctrina locurilor geometrice. Secole întregi ea rămâne în centrul preocupărilor ştiinţei eline.

Hipocrate din Chios a transformat puţin problema înlocuind-o cu aceea a două medii proporţionale. Ecuaţia problemei este (luând latura cubului dat ca unitate)

$$(1) \qquad x^3 - 2 = 0$$

Această ecuaţie de gradul al III-lea, pentru care grecii nu aveau nici un sistem de scriere, ei şi-o apropie înlocuind-o cu următorul sistem:

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2}$$

care poate fi interpretat ca înserare a două medii proporționale între 1 şi 2.

Menechne, discipol a lui Platon, inventează un dispozitiv mecanic constând din două parabole care, prin intersecția lor, livrează lungimea necunoscută. Eudox şi Architas din Tarent, pitegoricianul, dau alte soluții.

În secolul al VI-lea ecoul problemei nu se stinsese. Eutocius scrie un întreg referat asupra soluțiilor pe care fiecare geometru, în opt secole de cultură greacă se simțise obligat să le dea celebrei probleme. Prin el aflăm că Nicomede inventase concoida iar Diocles cicloida, pentru a putea construi cea de-a doua medie proporțională.

Problema trisecțiunii unghiului a fost dezbătută întâi în şcoala lui Platon. Un secol mai târziu, Dinostrat imagina o curbă mecanică (în disperare de a rezolva problema cu rigla şi compasul) care dădea în acelaşi timp şi o soluție cvadraturii cercului. De aceea curba a primit numele de cvadratricea lui Dinostrat. După altă sută de ani (150 îen) problema nu-şi pierduse interesul. Nicomede foloseşte concoida, inventată de el, pentru duplicarea cubului şi la trisecțiunea unghiului.

CAPITOLUL IV. DIFERITE METODE DE EFECTUARE A CONSTRUCȚIILOR. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE. INVERSIUNEA

1. Observații generale

Multe dintre problemele de construcție cu rigla şi compasul pot fi privite mai clar din punctul de vedere general al "transformărilor geometrice" în loc de a studia o construcție particulară, vom considera simultan o întreagă clasă de probleme legate între ele prin anumite procese de trasformare. Puterea clarificatoare a noțiunii de clasă, de transformări geometrice, nu este restrânsă câtuşi de puțin la problemele de construcție, ci influențează aproape întreaga geometrie. Vom studia aici un tip particular de transformare, inversiunea în raport cu un cerc dintr-un plan, care este o generalizare a simetriei obținute față de o dreaptă.

Prin transformare sau aplicație a planului pe el însuşi înțelegem o regulă care asociază fiecărui punct p al planului un alt punct P', numit imaginea lui P. Prin transformare; punctul P' se numeşte antecedentul lui P'.

Un exemplu simplu de astfel de transformare este dat de simetria față de o dreaptă L, aflat în plan; un punct P aflat de o parte a lui L, are ca imagine punctul P', aflat de cealaltă parte a lui L. Astfel încât L este mediatoarea segmentului PP'. O transformare poate lăsa pe loc anumite puncte ale planului, în cazul simetriei acest lucru se întâmplă cu punctele de pe dreapta L. Alte exemple de transformări sunt rotațiile planu-

Fig. 1. *Simetria unui punct față de o dreaptă*

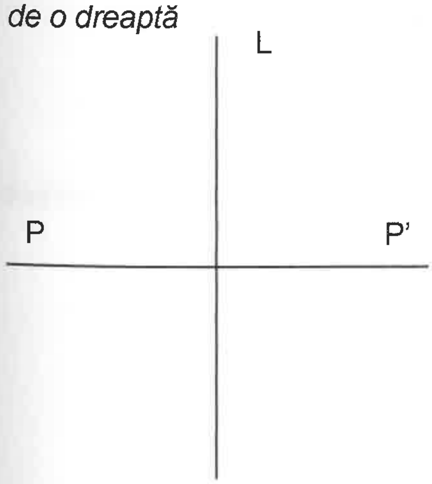
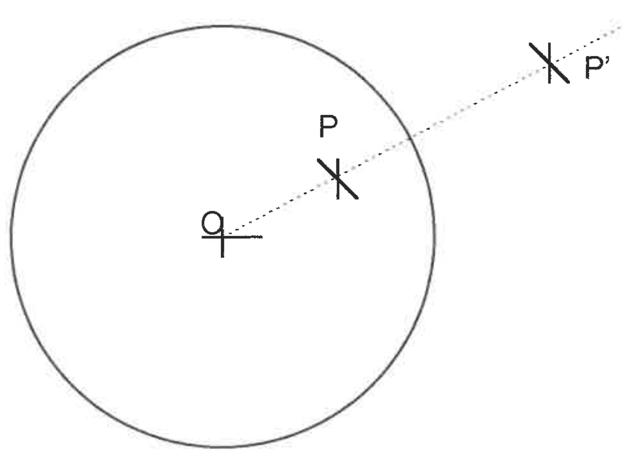


Fig. 2. *Inversul unui punct față de un cerc*



lui în jurul unui punct fix O, translațiile paralele care deplasează fiecare punct cu o distanță d, într-o direcție şi într-un sens dat (o astfel de transformare nu are puncte fixe) şi, mai general, mişcările rigide ale planului pot fi gândite ca fiind compuse din rotațiile şi translații paralele.

Clasa de transformări particulare care ne interesează acum este formată de inversiunile în raport cu cercul. Acestea sunt cunoscute uneori sub numele de simetrii circulare pentru că, cu o oarecare aproximație, ele reprezintă relația dintre original şi imaginea în reflexia într-o oglindă circulară. Într-un plan fix, fie dat un cerc C, cu centru O (numit polul inversiunii) şi de rază r, imaginea unui punct P este, prin definiție, punctul P' care se află pe semidreapta OP, astfel încât

$$(1) \qquad OP \cdot OP' = r^2$$

Se spune că punctele P şi P' sunt puncte inverse în raport cu C. din această definiție rezultă că, dacă P' este inversul punctului P, atunci P este inversul lui P'.

O inversiune permută interiorul şi exteriorul cercului C, deoarece dacă OP < r, avem OP' > r, iar pentru OP > r, avem OP' < r. Singurele puncte ale planului care rămân fixe prin transformare, sunt punctele de pe cercul C însuşi. Regula (1) nu defineşte o imagine a cercului O. Este clar că dacă un punct este variabil P, se apropie de imaginea P', se va îndepărta din ce în ce mai mult. Din acest motiv, spunem uneori că punctul O însuşi corespunde prin inversiune punctului de la infinit. Utilitatea acestei terminologii se află în faptul că ea ne permite să afirmăm că o inversiune stabileşte o corespondență între punctele planului şi imaginile lor, care este biunivocă fără excepție. Orice punct al planului are o singură imagine şi este el însuşi imaginea unui singur punct. Această proprietate este împărtăşită de toate transformările considerate mai înainte.

2. Proprietățile inversiunii

Cea mai importantă proprietate a unei inversiuni este faptul că ea transformă dreptele şi cercurile în drepte şi cercuri. Mai precis, vom arăta că printr-o inversiune

a) o dreaptă care trece prin O devine o dreaptă care trece prin O;

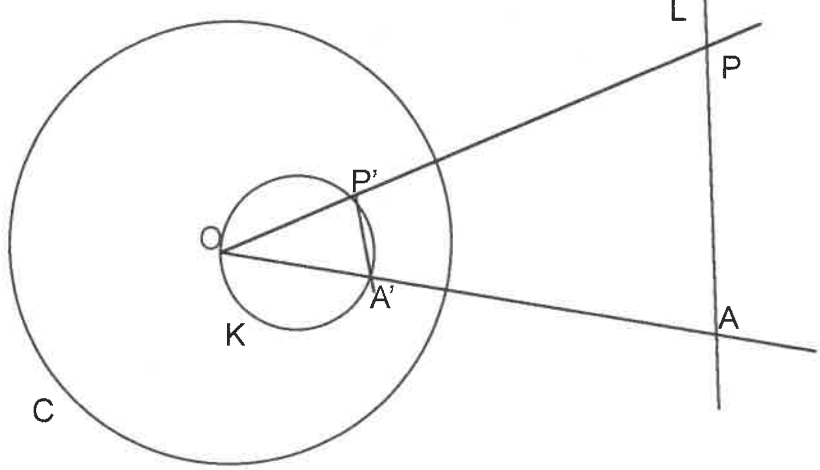
b) o draptă care nu trece prin O devine un cerc care trece prin O;

c) un cerc care trece prin O devine o dreaptă care nu trece prin O;

d) un cerc care nu trece prin O devine un cerc care nu trece prin O;

Propoziţia (a) este evidentă, deoarece din definiţia inversiunii, orice punct de pe dreaptă are ca imagine un alt punct al acelei drepte, astfel încât, cu toate că punctele dreptei sunt permanente, dreapta în ansamblu se transformă în ea însăşi.

Fig. 3. *Transformarea prin inversiune a unei drepte L într-un cerc*



Pentru a demonstra propoziţia (b), să coborâm o perpendiculară din O pe dreapta (L) (figura 3). Fie A piciorul acestei perpendiculare şi fie A' inversul punctului A.

Fie P un punct oarecare de pe L şi fie P' inversul său. Deoarece $OA' \cdot OA = OP' \cdot OP = r^2$, rezultă că

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA}$$

deci triunghiurile OP'A' şi OAP sunt asemenea şi unghiul OP'A' este drept. Din geometria elementară rezultă că P' se află pe cercul K, de diametru OA', astfel încât

Figura 10 *Inversiunea unui cerc.*

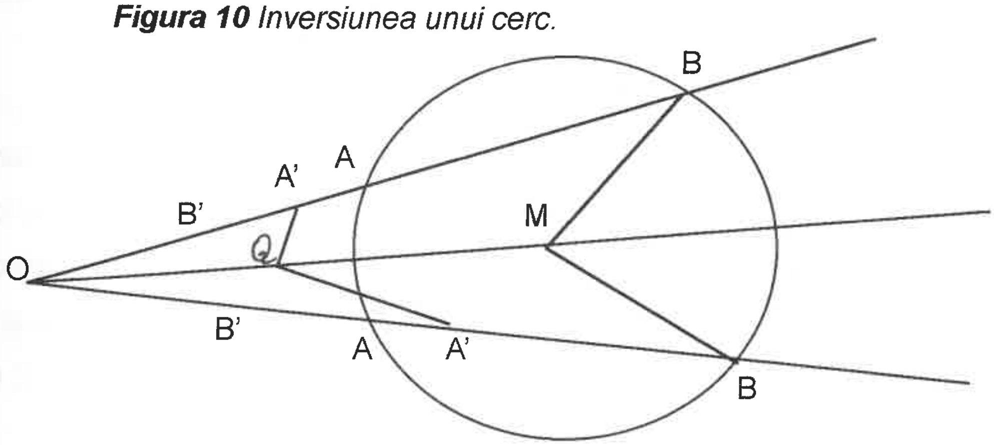


figura imensă a lui L este acest cerc. Acest fapt demonstrează propoziția (b). propoziția (c) rezultă acum din faptul că, deoarece inversul lui L este K, inversul lui K este L.

Rămâne să demonstrăm propoziția (d). Fie K un cerc care nu trece prin O, cu centrul în M şi de rază K. Pentru a obține imaginea lui ducem o dreaptă prin O, care intersectează pe K în A şi B şi apoi stabilim cum variază imaginile A', B', când dreapta dusă prin O intersectează pe K în toate modurile posibile. Să notăm distanțele OA = a, OB = b, OA' = a', OB' = b', OM = m, şi fie t lungimea unei tangente dusă prin O la K.

Avem aa' = bb' = r^2 în baza definiției inversiunii, şi ab = t^2, în baza unei proprietăți geometrice elementare acercului (puterea punctului față de cerc). Dacă împărțim primele egalităi prin ultima obținem

$$\frac{a'}{b}=\frac{b'}{a}=\frac{r^2}{t^2}=c^2$$

unde c^2 este o constantă care depinde numai de r şi t, şi este aceeaşi pentru toate pozițiile lui A şi B. Prin A' ducem o paralelă cu BM, care întâlneşte pe OM în Q. Fie OQ = q, şi A'Q = q. Atunci

$$\frac{q}{m}=\frac{a'}{b}=\frac{q}{k}, \text{ sau}$$

$$q = ma'/b = mc^2, \quad q = ka'/b = kc^2$$

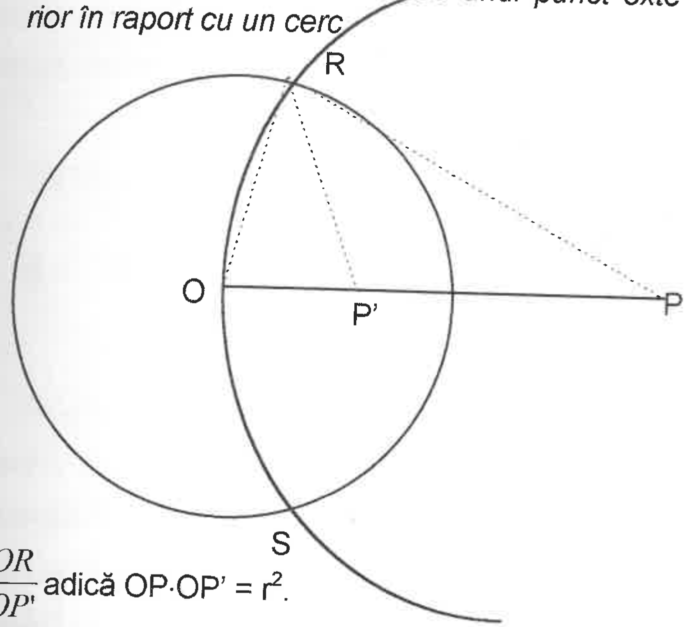
Aceasta înseamnă pentru toate pozițiile lui A şi B, Q se va afla întotdeauna în acelaşi loc pe OM şi distanța A'Q va avea întotdeauna aceeaşi valoare. De asemenea B'Q = q, deoarece a'/b = b'/a. Astfel, imaginile tuturor punctelor AB de pe K sunt puncte a căror distanță la Q este întotdeauna egală cu q, adică imaginea lui k este un cerc. Aceasta demonstrează propoziția (d).

3. Construcția geometrică a punctelor inverse

Teorema următoare va fi utilă în continuare. Punctul P', inversul unui punct dat P în raport cu un cerc C, poate fi construit geometric doar cu ajutorul compasului.

Să considerăm mai întâi cazul când punctul dat P este exterior vercului C, cu OP ca rază şi P ca centru, să descriem un arc de cerc, care intersectează pe C în punctele R şi S.

Figura 11 *Inversiunea unui punct exterior în raport cu un cerc*



Cu aceste două puncte luate ca centre, să descriem arce de cerc de rază r, care se intersectează în O şi într-un punct P' de pe dreapta OP. În triunghiurile isoscele ORP şi ORP' avem ∠ORP = ∠POR = ∠OP'R astfel încât aceste triunghiuri sunt asemenea şi de aceea

$\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OP'}$ adică $OP \cdot OP' = r^2$.

Deci P' este inversul căutat a lui P, care trebuie construit. Dacă punctul P se află în interiorul lui C, aceeaşi construcţie şi demonstraţie rămân în vigoare cu condiţia ca cercul de rază OP şi cu centrul în P, să intersecteze pe C în două puncte. În caz contrar putem reduce construirea punctului invers P' la cazul precedent folosind următorul artificiu simplu.

Să observăm mai întâi că doar cu ajutorul compasului, putem găsi un punct C pe dreapta carre uneşte două puncte date AO astfel încât AO = OC.

Pentru a face acest lucru, să trasăm un cerc cu centrul în O, de rază r = AO şi să de terminăm pe acest cerc punctele P, Q, C astfel încât AP = PQ = QC = r. Atunci C este punctul dorit după cum se vede din faptul că triunghiurile AOP, OPQ, OQC sunt echilaterale astfel încât OA şi OC formează un unghi de 180° şi OC = OQ = AO. Repetând acest procedeu, putem prelungi cu uşurinţă pe AO de câte ori dorim. În trecât fie zis, deoarece lungimea segmentului AQ este egală cu $r\sqrt{3}$, după cum se vede am construit în acelaşi timp pe $\sqrt{3}$, pornind de la segmentul unitate, fără a folosi rigla. Acum putem găsi inversul oricărui punct P aflat în interiorul cercului C. mai întâi să găsim un punct R pe dreapta OP, a cărui distanţă până la O este un multiplu întreg a lui OP şi care să se afle în exteriorul lui C.

$OR = n \cdot OP$

Putem face acest lucru purtând succesiv distanța OP cu compasul, până ce ajungem în exterorul lui C. acum găsim punctul R', inversul lui R, din construcția dată mai înainte. Atunci.

$$r^2 = OR' \cdot OR = OR' \cdot (n \cdot OP) = (n \cdot OR') \cdot OP$$

De aceea punctul P' pentru care $OP' = n \cdot OR'$ este inversul dorit.

4. Cum putem împărți un segment în două părți egale și găsi centrul unui cerc doar cu ajutorul compasului

Acum, după ce am aflat cum putem găsi inversul unui punct doar cu ajutorul compasului, putem efectua câteva construcții interesante. De exemplu să considerăm problema găsirii mijlocului unui segment cu extremitățile A şi B, folosind doar compasul (nu se poate trasa nici o dreaptă!). iată soluția: să trasăm cercul de rază AB cu centru B, şi să determinăm trei arce de rază AB începând din A. Punctul final C se va afla pe dreapta AB aşa că AB = BC. Să trasăm acum cercul de rază AB şi de centru A şi fie C' inversul punctului C în raport cu acest cerc. Atunci:

$$AC' \cdot AC = AB^2, \qquad AC' \cdot 2AB = AB^2, \qquad 2AC' = AB$$

Deci C' este mijlocul dorit.

O altă construcție cu ajutorul compasului, care foloseşte punctele inverse, este aceea prin care găsim centrul unui cerc, în care cunoaştem doar circumferința. Alegem un punct oarecare P pe circumferință şi cu centrul în acest punct, trasăm un cerc care intersectează cercul dat în punctele r şi s. Cu centrele în aceste puncte trasăm arce de rază RP = SP, care se intersectează în punctele Q. O comparație cu figura 12 arată că centrul necunoscut Q' este inversul lui Q în raport cu cercul de centru P, astfel încât Q

Figura 12 *Dublarea unui segment*

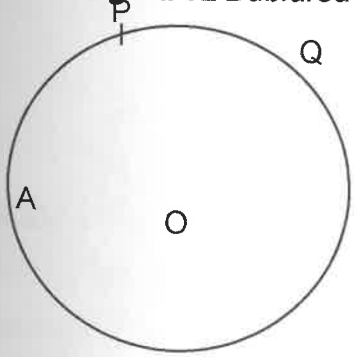
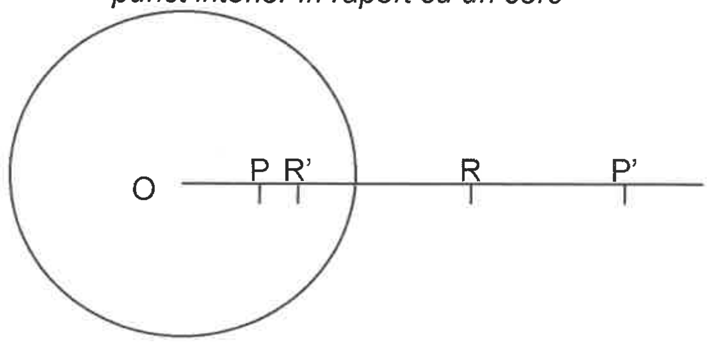


Figura 13 *Inversiunea unui punct interior în raport cu un cerc*



poate fi construit doar cu ajutorul compasului.

5. Construcţii numai cu ajutorul compasului

În timp ce este natural ca acceptând un număr mai mare de instrumente să putem rezolva un număr mai mare de probleme de construcţie, ne-am putea aştepta că reducând numărul instrumentelor permise, să micşorăm clasa construcţiilor posibile. De aceea a fost foarte surprinzătoare descoperirea făcută de italianul Marcheroni (1750-1800) că toate cosntrucţiile geometrice posibile doar cu ajutorul riglei şi al compasului pot fi efectuate numai cu compasul. Desigur, nu putem trasa dreapta care uneşte două puncte, dacă nu dispunem de riglă astfel încât această construcţie fundamentală nu este posibilă în teoria lui Marcherorni. În schimb, terbuie să concepem o dreaptă ca fiind dată de oricare două, din punctele ei. Folosind doar compasul, pe această cale putem construi punctul de intersecţie a două drepte şi de asemenea intersecţia unui cerc dat cu o dreaptă. În continuare vom rezolva problema înjumătăţirii unui arc dat AB, al unui cerc de centru O.

Figura 14. *Aflarea mijlocului unui segment*

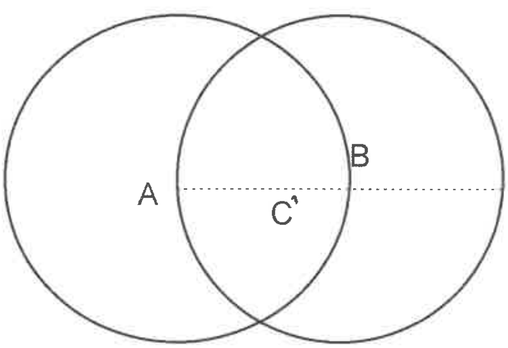
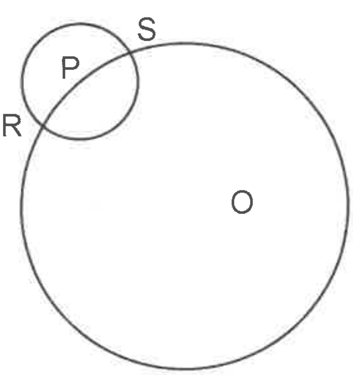


Figura 15 *Aflarea centrului unui cerc*



Construcţia este următoarea:

din A şi B ca centre să trasăm două arce de cerc de rază AO. Din O să ducem arcele OP şi OQ egale cu AB. Apoi să trasăm două arce cu PB şi QA ca raze şi cu P şi Q ca centre, care se intersectează în R. În sfârşit, cu OR ca rază, să descriem un arc cu centrul în P sau Q, până ce intersectăm pe AB. Acest punct de intersecţie este mijlocul

cerut al acrului AB. Ar fi imposibil să demonstrăm teorema generală a lui Marcheroni dând efectiv o construcție doar cu ajutorul compasului, pentru că numărul construcțiilor posibile nu este finit. Însă putem ajunge la acelaşi scop, demonstrând că fiecare din următoarele patru construcții fundamentale este posibilă doar cu ajutorul compasului.

(1) Trasarea unui cerc de rază şi de centru date

(2) Găsirea punctelor de intersecție a două cercuri.

(3) Găsirea punctelor de intersecție a unei drepte cu un cerc.

(4) Găsirea punctelor de intersecție a două drepte.

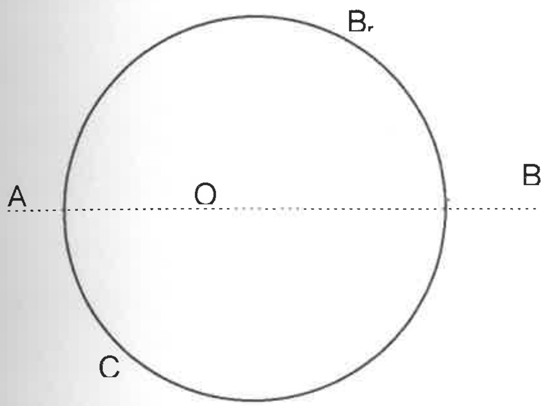
Orice construcție geometrică în sensul obişnuit, cu ajutorul riglei şi al compasului, constă dintr-o succesiune finită a acestor construcții elementare. Primele două sunt evident posibile doar cu ajutorul compasului. Rezolvarea problemelor mai dificile (3) şi (4) depinde de proprietățile inversiunii dezvoltate în paragraful precedent.

Să rezolvăm problema (3): să găsim punctele de intersecție ale unui cerc C cu o dreaptă dată prin două puncte A şi B. cu centrele A şi B şi respectiv razele AO şi BO să trasăm două arce care se intersectează din nou în P. Să determinăm acum punctele Q, inversul lui P în raport cu C, prin construcția dată precedent i efectuată doar cu ajutorul compasului. Să trasăm cercul cu centrul cu Q şi raza QO (acest cerc trebuie să intersecteze pe C) punctele de intersecție X şi X' ale acetui cerc cu centru Q dat sunt punctele cerute. Pentru a demonstra acest lucru trebuie să arătăm doarcă X şi X' sunt echidistante față de O şi P, dat fiind că A şi B au această proprietate prin construcție. Aceasta rezultă din faptul că inversul lui Q este un punct a cărui distanță la X şi X' este egală cu raza lui C. să remarcăm că cercul care trece prin X, X' şi O este inversul dreptei AB, deoarece acest cerc şi dreapta AB intersectează cercul C în aceleaşi puncte (punctele de pe circumferința unui cerc sunt propriile lor inverse). Construcția este imposibilă numai în cazul când dreapta AB trece prin centru cercului C. dar atunci punctele de intersecție pot fi găsite prin construcția dată în acest paragraf, ca mijloace ale arcelor de pe C, obținute prin trasarea unui cerc arbitrar cu centru în B, care intersectează cercul C în B_1 şi B_2. Metoda determinării cercului invers dreptei care uneşte două puncte date permite o rezolvare imediată a problemei (4). Să presupunem că dreptele sunt date prin AB şi A'B' (figura 13), să trasăm un cerc oarecare C în plan, şi prin metoda prece-

dentă să găsim cercurile inverse dreptelor AB şi A'B'. aceste cercuri se intersectează în O şi într-un punct Y.

Punctul X, inversul lui Y este punctul de intersecție cerut şi poate fi construit prin procedeul deja folosit. Faptul că X este punctul cerut este evident, deoarece Y este singurul punct invers, atât al unui punct AB cât şi a unui punct de pe A'B': deci punctul X', inversul lui Y, trebuie să se afle atât pe AB, cât şi pe A'B'.

***Figura 16** Intersecția unui cerc cu o dreaptă care trece prin centrul cercului*



Cu aceste două construcții am completat demonstrația echivalenței dintre construcțiile lui Marcheroni, care utilizează numai compasul, şi construcțiile geometrice clasice cu rigla şi compasul. Nu neam străduit să găsim soluții elegante pentru fiecare problemă în parte, deoarece scopul nostru a fost mai degrabă să furnizăm o privire în cadrul general al construcțiilor lui Marcheroni. Vom da însă construcția pentagonului regulat, mai precis vom găsi conci pnte pe un cerc, care vor fi vârfurile unui pentagon regulat înscris. Fie A un punct oarecare al cercului dat K. Latura unui hexagon regulat înscris este egală cu raza lui K. Prin urmare putem găsi punctele A, C, D pe K astfel încât arcele AB = BC = CD = 60° (figura 14). Cu A şi D ca centre şi AC ca rază trasăm arce care se intersectează în X. Atunci, dacă O este centrul lui K, un arc cu centrul în A, de rază OX va intersecta pe K în mijlocul F al arcului BC: acum, cu raza lui K, trasăm arce de cenrtu F, care intersectează cercul K în G şi H. Fie Y un puct a cărui distanță până la G şi H este egală cu OX, astfel încât O să se afle între X şi Y. Atunci segmentul AY va fi egal cu latura pentagonului cerut.

Inspirat de Marcheroni, Iacob Steiner (1796-1863) a încercat să folosească doar rigla în locul compasului. Desigur, doar cu ajutorul riglei nu putem ieşi dintr-un corp numeric dat şi deci ea nu este suficientă pentru toate construcțiile geometrice în sensul clasic. Este cu atât mai remarcabil faptul că Steiner a putut reduce folosirea compasului

la o singură aplicare. El a demosntrat că toate construcțiile din plan care sunt posibile doar cu rigla şi compasul, sunt posibile doar cu ajutorul riglei cu condiția ca să fie dat un singur cerc fixat şi centrul său. Aceste construcții utilizează metode proiective.

CAPITOLUL V. UN ALT PUNCT DE VEDERE ASUPRA CONSTRUCȚIILOR CU RIGLA ŞI COMPASUL

Să substituim conceptului empiric, de problemă rezolubilă cu rigla şi compasul, un concept pozitiv. Fără de această precauție ar fi zadarnic să sperăm o teorie matematică a acestor construcții. O problemă de geometrie este rezolubilă cu rigla şi compasul când ea revine la determinarea unui segment X_0 prin:

1) intersecții de drepte;

2) intersecții de drepte şi cercuri;

3) intersecții de cercuri.

Introduse succesiv cu ajutorul punctelor figurii primitive plus un număr de puncte accesorii. Să considerăm acum aceeaşi problemă în tratamentul ei prin geometrie analitică. Figura inițială e determinată când cunoaştem coordonatele unui anume număr de puncte şi coeficienții ecuațiilor unui anume număr de curbe algebrice. Însemnăm cu S mulțimea tuturor acestor mărimi şi cu R corpul prim. Considerăm "corpul problemei"

$$H = R (S)$$

avem de deosebit între:

I. soluția directă a problemei, în care prin rezolvarea ecuațiilor introduse numai de datele problemei (fără folosirea punctelor accesorii) ajungem să construim corpul de reducțiune L al ecuației $F_x = 0$, de care depinde necunoscuta X_0 a problemei.

II. soluția mijlocită a problemei unde (cu folosirea punctelor accesorii aşadar după prealabila adjuncționare la H a unei anumite mulțimi Σ de nedeterminate) urmărind soluția geometrică ajungem să construim peste

$$H^* = H (\Sigma)$$

Un alt corp de reducțiune L* al ecuației F_x. Cum so;uția geometrică revine la operațiile

1), 2) şi 3) este clar că L* provine din H* printr-o succesiune de adjoncțiuni pătratice din elemente luate extinderii imediat anterioare, să observăm că avem (corpul L fiind separabil):

$$L \cap H^* = H$$

Astfel ar exista un element θ din $H^* = H (\Sigma)$ depinzând veritabil de unele nedeterminate Σ şi situat în corpul L, aşadar algebric peste H. Ar urma ca unele din nedeter-

minatele Σ să fie legate algebric peste H, ceea ce e imposibil. Urmează atunci, că înfăşurările

$L \supset H$, $L^* \supset H^*$ au acelaşi grup al lui Galois, ζ. Altfel spus, ζ nu depinde de punctele accesorii folosite. Alt rezultat e următorul: dacă o problemă e rezolubilă cu rigla şi compasul, atunci există un corp de reducţie L* al ecuaţiei F [X] = 0 a problemi şi un corp de începere H* aşa încât L* provine din H* exclusiv, printr-o succesiune de adjoncţiuni pătratice reale.

Reciproc, dacă o mărime X_0 aparţine unui corp L*, axtindere finită din H* prin mijlocirea unei succesiuni de rădăcini pătratice din mărimi nu numai decât reale atunci X_0 se poate construi cu rigla şi compasul. Într-adevăr dacă avem de-a face cu un radical real $\sqrt{a}$ atunci îl construim din lungimile juxtapuse A şi I ca medie proporţională a lor: cu rigla şi compasul, în felul cunoscut. Dacă avem de-a afce cu un radical dintr-un număr complex

$$\sqrt{a+ib}$$

atunci figurăm pe a + ib printr-un punct C din planul lui Gauss. Construim ca mai sus radicalul real

$$\sqrt{\sqrt{a^2}+b^2}=\sqrt{OC}$$

apoi împărţim în două unghiul pe care OC îl face cu axa O_x (construcţia cu rigla şi compasul) şi transpunem segmentul $\sqrt{OC}$ pe bisectoarea interioară a acestui unghi în amândouă direcţiile (construcţie cu rigla şi compasul). Deci afirmaţia e întemeiată. După această pregătire, să tercem la demontarea a două teoreme care, împreună, ne dau criteriul căutat. Deşi cazul care priveşte construcţiile cu rigla şi compasul este acela al caracteristicii p = 0, le vom stabili totuşi în condiţii mai generale.

Teoremă:

Fie un corp L* construit peste un corp H* de caracteristică $p \neq 2$, dar altfel arbitrar, prin adjoncţiuni succesive, în număr finit de rădăcini pătratice $\sqrt{\theta}$, potrivit regulii ca, o dată cu θ să adjuncţion toate rădăcinile pătratice $\sqrt{\theta}_i$ din conjungaţii θ_i ai lui θ în raport cu H*.

În aceste condiţii L* rezultă un corp normal, extindere separabilă finită peste H*, cu un grup al lui Galois, de ordin o putere 2^s a lui 2.

Demonstrație. O ecuație pătratică ireductibilă separabilă în toate corpurile afară poate de acelea de caracteristică p = 2. Ceva mai mult, rădăcinile acestor ecuații sunt exprimabile printr-un radical pătratic după formula obişnuită.aşadar toate aceste adjuncțiuni de elemente pătratice revin la adjuncțiuni de radicali pătratici. Prin urmare L* provine din H* prin adjuncțiuni succesive de elemente separabile, unul față de adjuncțiunea precedentului. Rezultă atunci că, L* este extindere separabilă (finită) peste H*.

E clar că adjuncțiunea primei rădăcini pătrate $\sqrt{t}$ la H* ne dă un corp normal H* ($\sqrt{t}$) peste H*, căci singurul conjugat al lui $\sqrt{t}$ (t→H*) este

$$-\sqrt{t} \rightarrow H^* (\sqrt{t})$$

Să admitem atunci că procedeul descris în enunț aplicat de n-1 ori ne-a dus la o extindere (S mulțimea adjunctă completă).

$$\Lambda = H^* (S)$$

care este corp normal peste H*. Adjuncționăm acum răcinile pătrate.

$$\sqrt{\theta},\ \sqrt{\theta}_1,\ \ldots,\ \sqrt{\theta_{m-1}},\ (\theta \rightarrow \Lambda)$$

Din toate conjugatele lui θ față de H*. Dacă φ [x] = 0 este ecuația ireductibilă, cu coeficienți în H* verificată de θ, aceasta revine la a adjuncționa toate rădăcinile.

$\Sigma = (\pm\sqrt{\theta}, \pm\sqrt{\theta}_1, \ldots, \pm\sqrt{\theta_{m-1}})$ ale ecuației

$\varphi [x^2] = 0$ cu coeficienții în H*

deci $\Lambda (\sqrt{\theta}, \sqrt{\theta}_1, \ldots, \sqrt{\theta_{m-1}}) = H^* (S, \Sigma)$ unde mulțimea adjunctă S + Σ este o mulțime completă de conjugate.

Aşadar $\Lambda (\sqrt{\theta}, \ldots, \sqrt{\theta_{m-1}})$ e un corp de reducție, deci un corp normal peste H* şi anume: corp normal, extindere separabilă finită. E deci probat prin recureță că L* e corp normal, extindere separabilă finită. Să căutăm acum gradul lui L* peste H*. Vom întrebuința tot un raționament prin recurență.

E clar că gradul primei adjuncțiuni H* ($\sqrt{t}$) este 2.

Presupunem că gradul față de H* al adjuncțiunii Λ, obținută după aplicarea de (n-1) ori a procedeului din enunț este o putere de 2^{σ} a lui 2. Cum Λ e corp normal

conține o dată cu θ toate conjugatele sale: $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$. Încât putem scrie în mod pleonastic: $\Lambda = (\sqrt{\theta}, \sqrt{\theta}_1, \ldots, \sqrt{\theta_{m-1}}) = \underbrace{\Lambda(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}}_{\Lambda} (\sqrt{\theta}, \sqrt{\theta}_1, \ldots, \sqrt{\theta_{m-1}})$

Se Vede atunci că gradul adjuncțiuni lui $\sqrt{\theta}_1$ față de precedentă este 2 sau 1. E vorba de gradul față de Λ. Deci gradul adjuncțiunii față de primul membru față de Λ, e o putere a lui 2. Cum gradul lui Λ față de H* este 2^r conchidem, că aplicația teoremei înmulțirii gradelor, că gradul corpului $\Lambda ((\sqrt{\theta}, \sqrt{\theta}_1, \ldots, \sqrt{\theta_{m-1}})$ pe care-l obțnem prin a n-a operație descrisă în enunț față de H* e o putere 2^{σ} a lui 2.

Cum L* e corp normal extindere separabilă finită peste H*, conchidem că ordinul grupului lui Galois ζ al înfăşurării L* mai mare decât H* este 2^s.

Observație. Teorema se menține încă în cazul p = 2 cu condiția ca elementele pătratice pe care le adjuncționăm să fie separabile şi ca, o dată cu rădăcinile ecuației

$$x^2 + \alpha_x + \beta = o$$

Să adjuncționăm şi rădăcinile ecuațiilor relative la toți conjugații α_i, β_j ai lui α, β.

Teoremă reciprocă: dacă L* este corp normal extindere separabilă finită peste H* cu grup a lui Galois de ordin egal cu putere 2^s a lui 2, atunci L* provine din H* prin adjuncțiuni succesive de rădăcini pătrate purtând asupra unor elemente din adjuncțiunea imediat anterioară.

Demonstrație: dacă $\zeta_2 s$ este grupul lui Galois, conform unei teoreme asupra p-grupurilor el e rezolubil. Admite un şir de compoziție cu factori de ordine prime toate egale cu 2. Aşadar, construcția lui L* din H* decurge prin construcțiuni succesive de corpuri intermediare ciclice de ordin 2, astfel supus prin adjuncțiuni de rădăcini pătrate din elemente aparținând corpului anterior.

1. Criteriul de recunoaştere al construcțiilor cu rigla şi compasul

Teoremă: pentru ca o problemă geometrică să fie rezolubilă cu rigla şi compasul este necesar şi suficient ca grupul lui Galois ζ al problemei să aibă un ordin egal cu o putere 2^s a lui 2.

Demonstrație. Condiția e necesară. Într-adevăr, dacă L e corpul de reducție şi H corpul de începere (evident de caracteristică P=0) al problemei, am văzut că grupul lui Galois al înfăşurării $L \supset H$ este acelaşi cu grupul lui Galois al înfăşurării $L^* \supset H^*$, unde L^k

provine din H* prin adjuncţiuni pătratice succesive. Dar L* e corp normal. Prin urmare, o dată cu $\sqrt{\theta}$ avem obligatoriu adjoncționate şi rădăcinile pătrate din toțo conjugații lui θ față de H*. Aşadar ζ este obligatoriu de ordin 2^s.

Condiția e suficientă. Într-adevăr, dacă ζ e de ordin 2^s, în virtutea teoremei demonstrate corpul de reducțiune L al problemei provine din H prin adjuncțiuni succesive de rădăcini pătrate. Dar, după cum am arătat, aceasta ajunge pentru ac necunoscuta X_0 a problemei, să poată fi construită cu rigla şi compasul.

2. Imposibilitatea dublării cubului

Problema dublării cubului revine, cum am arătat la a construi cu rigla şi compasul rădăcina x_0 a ecuației

$$x^3 - 2 = 0$$

peste corpul R a numerelor raționale.

Această ecuație e însă ireductibilă. Putem da mai multe argumente:

1) e ireductibilă în virtutea faptului că e o ecuație binomă de grad prim, care nu se reduce decât dacă 2 este putere 3 exactă în R. Fie u/v funcția ordinară simplificată a unui număr din $\mathfrak{R}$ a cărui cub ar putea fi egal cu 2. Am avea $2v^3 = u^3$

Deci u^3 se împarte cu numărul prim 2. Atunci chiar u se împarte cu 2:

$$u = 2w$$

Relația devine $\quad v^3 = 2^2w^3$

Citim că v^3 şi deci şi v se împarte de asemenea cu 2.

Concluzia e contradictorie, deoarece u, v au fost presupuse prime între ele. Deci ecuația e ireductibilă.

2) e ireductibilă în virtutea criteriului lui Eisenstein pentru un număr prim q = 2. Într-adevăr toți coeficienții ecuației afară de primul se împart cu 2, iar ultimul nu se împarte cu 4. Deci ecuația are un grup al lui Galois tranzitiv subgrup al grupului $\zeta_{3!}$. Dar singurele grupuri tranzitive sunt $\zeta_{3!}$ şi $\zeta_{3!/2}$ ale căror ordine nu sunt puteri ale lui 2. Deci problema, nesatisfăcând la criteriul necesar şi suficient de rezolubilitate cu rigla şi compasul, e imposibilă. Alt argument! Cum ecuația e ireductibilă, corpul intermediar $\mathfrak{R}(x_0)$ are gradul trei. Deci, ordinul grupului lui Galois (gradul corpului de reducție) se divide cu 3 şi deci nu poate fi o putere a lui 2. Problema e imposibilă .

3. Imposibilitatea trisectării unghiului cu rigla şi compasul

Am văzut că problema revine la a cosntrui cu rigla şi compasul o rădăcină a ecuației

$$4x^3 - 3x - a = 0, \qquad |a| < 1 \qquad (*)$$

cu coeficienți în $\mathfrak{R}_{(a)}$, unde a este o nedeterminată (extinderea lui $\mathfrak{R}_{(a)}$ e transcendentă).

Dacă ecuația r fi reductibilă ar admite cel puțin o rădăcină x_0 din $\mathfrak{R}_{(a)}$. Această rădăcină ar fi de forma

$$x_0 = p[a]/q[a]$$

unde p[a] şi q[a] sunt polinoame ale inelului $\mathfrak{R}$. Important este să ne dăm seama că deşi $|a| < 1$, totuşi inelul $\mathfrak{R}_{(a)}$ e un inel de polinoame. Într-adevăr, el are ca imagine amorfă inelul de polinoame $\mathfrak{R}_{(x)}$. Lui 0 din $\mathfrak{R}_{(x)}$ nu-i poate corespunde în $\mathfrak{R}_{(a)}$ decât polinomul identic nul, căci a nu este lagebric ci transcendent relativ la $\mathfrak{R}$. Prin urmare, într-adevăr $\mathfrak{R}_{(a)}$ e izomorf cu $\mathfrak{R}_{(x)}$. Putem presupune polinoamele $p_{(a)}$, $q_{(a)}$ prime între ele. Ar trebui să avem identitatea:

$$4p^3 - 3pq^2 - aq^3 = 0$$

Inelul $\mathfrak{R}_{(a)}$ e cu descompunere unică în factori primi (e chiar inel cu ideale principale). Ca atare, din faptul care apare pe identitatea de mai sus, că Q divide pe p^3 (înmulțit cu o unitate a inelului) urmează că -q divide pe p. Însă p şi q sunt prime între ele. Urmează, că q este o unitate a inelului, aşadar $q = \beta$, $\beta \to \mathfrak{R}$, $\beta \neq 0$.

Citim, de asemenea, că p trebuie să dividă pe a (înmulțit cu o unitate $q = \beta$ a inelului). Cum a e un polinom prim, avem două cazuri:

1) $p = \alpha a$, $\alpha \to \mathfrak{R}$

2) $p = \alpha$, $\alpha \to \mathfrak{R}$

1) avem pentru x_0:

$$x_0 = \gamma a, \qquad \frac{\alpha}{\beta} \to \mathfrak{R}$$

Introducând în (*) obținem

$$4\gamma^3 a^3 - 3\gamma a - a = 0, \gamma \to \mathfrak{R}$$

Ar urma ca a să fie algebric, ceea ce am exclus. Deci acest caz e contradictoriu.

2) Avem pentru x_0

$$x_0 = \gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \to \Re$$

ecuația (*) conduce la identitatea

$$4\gamma^3 - 3\gamma - a = 0, \gamma \to \Re$$

Însă a e transcendent. Încât şi acest caz e contradictoriu, conchidem la ireductibilitatea în $\Re_{(a)}$ a ecuației (*).

Grupul ei al lui Galois este aşadr un subgrup tranzitiv al lui $\zeta_{3!}$. Prin urmare de ordinul 6 sau 3, deci în nici un caz o putere a lui 2. Criteriul de rezolubilitate cu rigla şi compasul nu e satisfăcut. Problema trisecțiunii unghiului (cu rigla şi compasul) e imposibilă.

4. Determinarea tuturor poligoanelor regulate inscriptibile în cerc cu rigla şi compasul

Marimea reală de care depinde înscrierea unui astfel de poligon este $\cos\frac{2\pi}{n}$, unde n este numărul laturilor. Observăm că mărimea $\cos\frac{2\pi}{n}$ e rezolubilă cu rigla şi compasul, o dată cu $\sin\frac{2\pi}{n} = \sqrt{1-(\cos\frac{2\pi}{n})^2}$

Şi deci odată cu mărimea complexă din planul lui Gauss.

$$X_0 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

Dar această mărime e o rădăcină a ecuației binome unitare

$$x^n - 1 = 0,$$

peste corpul $\Re$ al numerelor raționale. Dar grupul ei al lui Galois are ordinul $\varphi_{(n)}$ unde φ e funcția lui Euler.

Încât, aplicând criteriul, condiția necesară şi suficientă, transcrierea acestui poligon să se poată executa cu rigla şi compasul este:

$$\varphi_{(n)} = 2^s \qquad (1)$$

Să punem pentru descompunerea lui n factori primi diferiți

$$n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots q_k^{\alpha_k}$$

Avem

$$\varphi_n = \prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q_i - 1)$$

Înlocuind în (1) obținem condiția

$$(2) = \varphi_n = \prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q_i - 1) = 2^s$$

deci obligatoriu $q_i = 2$, $\alpha_i > 1$

Cum q_i sunt factori diferiți, urmează că cel mult un factor q_1 poate figura la o putere α_1 mai mare decât 1 şi atunci acel factor este obligatoriu egal cu 2. Conchidem

(3) $q_1 = 2$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_i = 1$, i = 1, 2, ..., k

Înlocuin în (2) obținem

$$2^{\alpha_1 - 1} \prod_{i=2}^{k} (q_i - 1) = 2^s$$

de aici rezultă

(3') $q_i = 2^{h_i} + 1$, i = 2, 3, ..., k

Condițiile (3), (3') se rezumă în următoarea

(4) $n = 2^{\alpha_1}(2^{h_2} + 1)(2^{h_3} + 1)\ldots(2^{h_k} + 1)$ $\alpha_1 \geq 0$

unde fiecare din factorii $2^{h_i} + 1$ trebuie să fie primi.

Condiția necesară (4) e şi suficientă căci verificăm imediat $\varphi_{(n)} = 2^s$

Toată problema se reduce la determinarea tuturor numerelor prime de forma $2^h + 1$. E o problemă încă nerezolvată. Iată singurele rezulatte la care s-a ajuns. Factorii primi ai lui h trebuie să fie toți 2. Într-adevăr, dacă h ar cuprinde un factor prim $r > 2$, deci impar, am avea

$$q = 2^h + 1 = (2^l)^r + 1 = (2^l + 1)\,(2^{l(r-1)} + \ldots\ldots + 2^l + 1)$$

Conform divizibilității cu x + a şi x - a. Fiecare din cele două sume din paranteză conține cel puțin doi termeni aşadar sunt mai mari ca 1. Prin urmare $2^h + 1$ n-ar fi prim. Avem deci această formă mai tare a numerelor prime $2^h + 1$:

$$q = 2^{2^m} + 1$$

pentru m=0, 1, 2, 3, 4 obținem numerele verificate ca prime.

$q = 3$

$q = 5$

$q = 17$ (poligonul lui Gauss)

$q = 257$

$q = 65537$

Pentru m = 5, nu mai obţinem număr prim. Frecvenţa numerelor prime de această formă este necunoscută.

Suntem conduşi la această teoremă (a lui Gauss) care tranşează problema înscrierii cu rigla şi compasul a poligoanelor regulate.

Numai poligoanele regulate cu un număr de laturi de forma

$$n = 2^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}(2^{2^{\beta_i}}+1)\,,\ \alpha \geq 0$$

unde $2^{2^{\beta_i}}$ +1 sunt numere prime, conduc la înscrieiri în cerc cu rigla şi compasul (condiţia necesară şi suficientă). Lăsând la o parte factorul 2^{α}, singurele valori ale lui n compatibile cu problema se obţin înmulţind între ele în toate felurile, însă numai o singură dată următoarele numere prime.

3, 5, 17, 257, 65537.

Aşadar avem cunoscute până azi $(1 + 1)^5 = 32$ tulpine de astfel de poligoane regulate.

5. Observaţii cu privire la împărţirea unui unghi general în n părţi egale

Ecuaţia de care depinde problema este ecuaţia binomă

$$x^n - e^{jw} = 0$$

cu coeficienţii în corpul numerelor raţionale $\mathfrak{R}$, unde e^{jw} este un număr complex unimodular, transcendent, peste $\mathfrak{R}$. Deci e^{jw} joacă rolul unei nedeterminate faţă de $\mathfrak{R}$. Aşa fiind, ecuaţia binomă precedentă este ireductibilă în $\mathfrak{R}$. Urmează ca grupul lui Galois este grupul linear complet.

$$X^x = ax + b$$

peste inelul $\ell/(n)$. ordinul său este

$$n\varphi_{(n)} = 2^s$$

Punând pentru descompunerea în factori prim diferiți n=$q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \dots . q_k^{\alpha_k}$

Condiția se scrie

$$\prod_{i=1}^{k} \cdot q_i^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{k} (q_i - 1) = 2^s$$

Cum $\alpha_i > i$, urmează

$q_i = 2, i = 1, 2, \dots.., k$

Dar q_i sunt diferiți, deci obligatoriu k = 1

Relația devine $2^{\alpha_1} = 2^s$.

La care putem totdeauna satisface luând $\alpha_1 = s$

Conchidem la următoarea teoremă care generalizează pe aceea privitoare la imposibilitatea trisectării unghiului:

Teoremă: condiția necesară şi suficientă pentru ca un unghi general să poată fi împărțit cu rigla şi compasul în n părți egale, este $n = 2^s$

CAPITOLUL VI. METODICA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE CONSTRUCȚII GEOMETRICE

Într-o astfel de problemă se consideră date o familie D de elemente geometrice, (puncte, drepte, lungimi, cercuri, unghiuri sau arce) şi se cer determinate anumite necunoscute alcătuind o altă familie x, astfel încât pentru elementele din $D \cap X$, să fie satisfăcute anumite proprietăți P. Problema necesită deasemenea elementelor lui X, dar caesta este doar un aspect la problemei, şi nu cel mai important. Se impunedovedirea proprietăților P precum şi precizarea situațiilor în care soluția există şi în care nu, şi în care aceasta soluție este sau nu unică, etc.

Pentru "desenarea" elementelor din X sunt permise anumite instrumente de construcție, alcătuind o familie I precizată de enunțul problemei. Un astfel de instrument trebuie privit nu ca o entitate fizică ci ca un dispozitiv abstract permițând anumite construcții bine precizate, atunci când enunțul nu face precizări conrare se subânțelege că instrumentele permise sunt rigla şi compasul. În general în cadrul unei probleme de construcție se evidențiază patru etape ale căror conținut îl vom descrie succesiv.

1. **Analiza**. Începe de obicei prin fraza “presupunem problema rezolvată”. În cadrul acestei etape pe o figură de obicei aproximativă, considerăm simultan datele (elementele lui D) şi necunoscutele (aparţinând lui X).

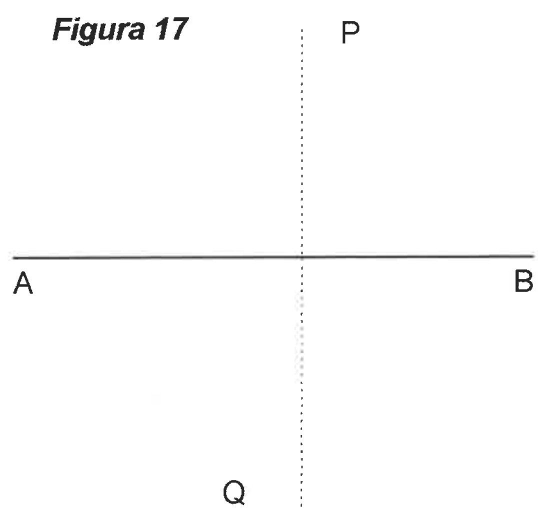
Se adugă figurii elemente noi (Construcţii ajutătoare) caracterizate prin proprietăţi ale lor referitoare la elemente din D $\cap$ X, alcătuind o mulţime A. Se pun apoi în evidenţă proprietăţi definitorii ale elementelor din A ce folosesc doar elemente din D şi proprietăţi definitorii pentru elemente din X formulate cu ajutorul elementelor din D şi A.

2. **Construcţia** sau **sinteza.** Exprimă succesiuni de utilizări ale instrumentelor pentru a trasa elementele din A şi apoi din X. Această etapă constituie în fond o “reţetă” de fabricare a elementelor din X. Credem că tendinţa manifestată adeseori de a da doar această etapă în probleme de construcţii încurajează dogmatismul, geometria contemporană nu rezidă în reţete.

3. **Demonstraţia** sau **justificarea.** Conţine argumentarea faptului că elementele construite satisfac proprietăţile enunţate. Prin intermediul acestei etape problemele de construcţie îşi justifică încadrarea în probleme de geometrie şi nu de desen linear.

4. **Discuţia.** Pune în evidenţă condiţii asupra datelor problemei pentru ca să existe soluţii şi o estimare a numărului de soluţii. În cadrul acestei etape sunt justificate şi generalizări sau analogii ale problemei. În general discuţia este conturată prin analiza critică a fiecărei operaţii descrise în etapa de construcţie. Schema de succesiune a celor patru etape: analiza-sinteza, demonstraţia, discuţia nu trebuie înţeleasă rigid, elementele de demosntraţie sau discuţie pot apărea şi în analiză, unele elemente ajutătoare pot apărea doar în demosntraţie sau discuţie, anumite situaţii neprevăzute în etapa sintezei pot fi precizate în cadrul discuţiei. Următoarele exerciţii rezolvate sunt destinate în primul rând exemplificării necesităţilor etapelor descrise şi în al doilea rând reîmprospătării soluţiilor unor probleme des reasamblate în

Figura 17



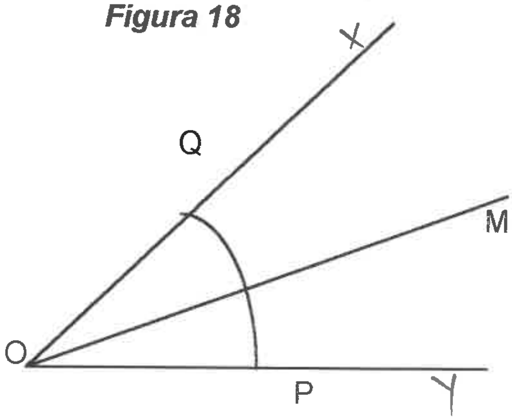
soluționarea altora mai dificile. În primele probleme, deosebit de simple, nu este necesară apariția tuturor celor patru etape.

Exemplul 1. Construcția mediatoarei unui segment (AB) (figura 17). Trasăm cu ajutorul compasului două arce de cerc cu centrul A şi B şi cu aceeaşi razămai mare decât jumătatea segmentului) . Cele două arce se vor intersecta în P şi Q. Dreapta P şi Q este mediatoarea segmentului (AB).

Justificarea. Punctele P şi Q sunt egal depărtate de A şi B şi deci aparțin mediatoarei segmentului şi două puncte determină o dreaptă.

Observații: această construcție foloseşte şi la aflarea mijlocului unui segment care este dat de intersecția mediatoarei cu segmentul.

Figura 18



Exemplul 2. Construcția bisectoarei interioare a unui unghi.

Construcția (figura 18) . Fie unghiul XOY. Cu centrul în O trasăm un arc de cerc ce intersectează IOX şi IOY în P şi Q. Cu centru în P şi Q şi cu aceeaşi rază (dar nu neapărat) cea anterioară se descriu două arce în interiorul unghiului ce se intersectează în M. OM este bisectoarea cerută.

Demonstrația: ΔMOP = ΔMOQ (L.L.L.) şi prin urmare $\widehat{MOP} \equiv \widehat{MOQ}$ deci IOM bisectoarea XOY.

Exemplul 3. Construcția perpendicularei prin A pe o dreaptă d.

Construcția. Un cerc C (A, A, B) cu B $\in$ d, mai taie d în B'. trasăm mediatoarea m a segmentului (BB').

Justificarea. Din construcție A $\in$ m, şi mediatoarea este perpendiculară pe BB'.

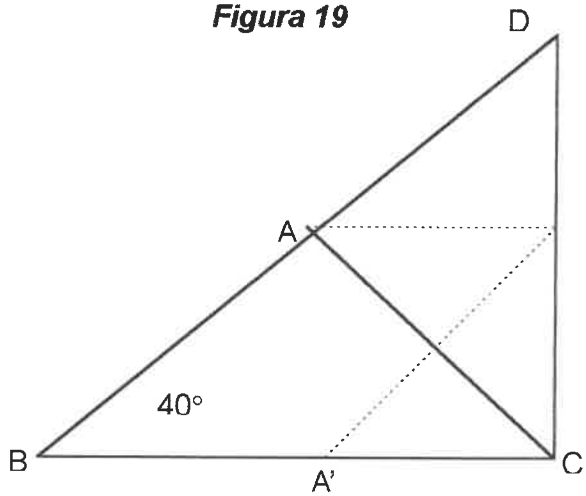
Discuție. Dacă C este tangent lui d, atunci AB este perpendiculara căutată. La nivelul clasei a VI-a şi a VII-a se va merge, de regulă, de la construcții particulare cu elemente ce au măsuri determinate către construcții cu elemente de măsuri neprecizate, dar presupuse cunoscute aşa cum vom exemplifica mai jos.

Exemplul 4. Să se construiască un triunghi ABC în care se cunosc AB + AC=m, BC= a, unghiul B=u°, <90°.

Dcaă nivelul clasei nu este deosebit de ridicat se va rezolva mai întâi problema. Să se construiască un triunghi ABC dacă AC + AB = 7 cm. BC= 5 cm, şi unghiul B=4o°.

Presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul căutat. Deci presupunem

Figura 19



că BC este congruent cu un unghi de măsura 40° (Figura 20). C construim segmente şi unghiuri congruente cu segmente şi unghiuri date. În aceste construcţii cu rigla şi compasul, nu sunt date măsuri deci numere, ci segmente, unghiuri, drepte, Puncte, etc.

Cu compasul nu putem determina poziţia lui A pe latura AB a triunghiului. Deoarece nu cunoaştem segmentul AB doar pe această latură am putea construi un segment congruent cu AB = AC. Fie D ∈ AB, astfel cu BD = 7 cm, şi (AD) ≡ (AC). Deci mediatoarea lui (DC) trece prin A. Rezultă că am putea efectua construcţia astfel:

1. Construim segmentul (BC) (Figura 13)

2. Construim unghiul CBX = 40°

3. construim pe latura BX a unghiului B un segment (BD) de lungime egală cu AB + AC.

4. Construim mediatoarea segmentului [DC]. Dacă mediatoarea lui (DC) intersectează (BD) într-un punct A interior segmentului (BD), înseamnă că am construit triunghiul care îndeplineşte condiţiile din enunţ. Suntem obligaţi să analizăm şi cazurile când mediatoarea lui DC nu ar intersecta BD într-un punct interior lui.

Din unghiul B < 90° şi AB + AD > BC ⇒ unghiul BCD > D

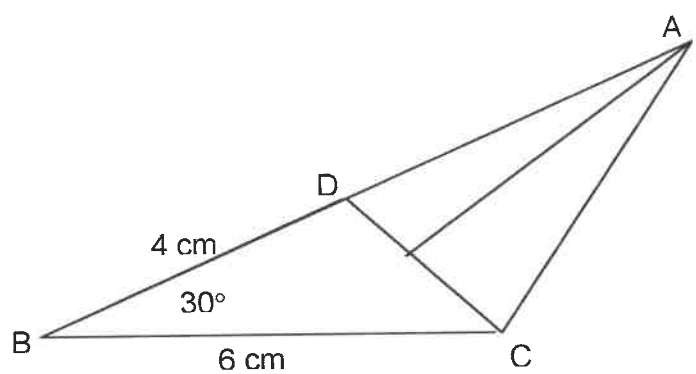
Din unghiul B < 90° şi C > D ⇒ unghiul D < 90°

Presupunem că mediatoarea lui DC trece prin B. Atunci (BD) ≡ (BC) ceea ce contrazice ipoteza BD > BC. Presupunem că mediatoarea lui DC taie BC într-un punct A! (Evident, A'C este mai mic decât BC) În acest caz (DA') ≡ (A'C). Unghiul BCD ≡ unghiul CDA' < unghiul CDB ⇒ BD < BC, ceea ce contrazice relația BD > BC.

Cum mijlocul lui DC nu aparține lui BD, rezultă că BD şi mediatoarea lui DC au un singur punct comun. Deci triunghiul căutat există şi este unic. Aşa cum s-a putut observa a intervenit în mică măsură faptul că elementele date au avut măsuri concrete. A crescut însă convingerea elevului față de determinarea figurii căutate. După astfel de probleme putem trece la o construcție în care BC = m, AB + AC= n, şi unghiul B = u°

Exemplul 5 Să se construiască un triunghi ABC în care, BC = 6 cm, AB - AC = 4 cm, şi unghiul B =30° Măsurile 6, 4, nu pot fi luate decât cu o condiție: BC > AB-AC. Din relația AB-AC=4 cm, rezultă că am presupus AB > AC.

Figura 20



Presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul căutat (Figura 21). Fie D pe AB astfel ca AB - AD = 4 cm. Deci (AD) ≡ (AC). De aici rezultă că A trebuie să se găsească pe mediatoarea lui DC. Cum DC poate fi determinat cu datele problemei, construcția se va realiza astfel:

1. Construim un segment BC = 6 cm
2. Construim unghiul CBX=30°
3. Pe BX construim un segment BD = 4 cm
4. Unim D cu C şi construim mediatoarea lui DC. Dacă mediatoarea lui DC intersectează BX în A, atunci ABC este triunghiul căutat. Şi în acest caz, vom analiza dacă mediatoarea lui DC intersectează BX într-un punct exterior segmentului BD şi vom demonstra existența şi unicitatea punctului A. Că trebuie să construim mediatoarea lui

DC am dedus numai din analiza figurii în care am presupus problema rezolvată şi apoi am executat construcţia riguroasă.

De obicei în geometrie dăm elevilor figuri geometrice şi cerem să le descopere proprietăţile. În problemele caută să execute figuri geometrice care să aibă proprietăţile respective. În general, problemele de construcţie se rezolvă în două moduri:

1) Construind direct elementele date şi obţinând astfel figura cerută (în general, dacă problema este simplă).

2) Presupunând figura (cu proprietăţile date) construită şi descoperind şi alte proprietăţi care să stea la baza construcţiei cu rigla şi compasul.

În cazul 1) distingem următoarele etape: construcţie, discuţie, iar în cazul 2) analiza, construcţia, demonstraţia şi discuţia. Exemplificăm fiecare metodă prin exemplelele următoare.

Exemplul 6. Să se construiască triunghiul ABC în care se cunosc: latura BC, mediana AM şi unghiul A. Discuţie. Construim un segment BC care să aibă lungimea egală cu cea a segmentului dat. Cu rigla şi compasul ştim să determinăm mijlocul său M. Vârful A va fi la distanţa dată, AM, de M, deci se va găsi pe cercul cu centrul în M şi raza AM. Descriem acest cerc. Cum unghiul BAC este dat, înseamnă că A se află pe cele două arce capabile de unghiul A şi cu extremităţile B şi C. Punctul A se află acolo la intersecţia cu două locuri geometrice: arcul capabil de unghiul A şi cercul anterior construit. Discuţie. Această constă în a analiza dacă cele două locuri geometrice au un ounct comun, mai multe, sau nici unul.

1. dacă AM >BC/2 şi MA < MN (MN ⊥ BC) problema are 4 soluţii: DABC, DA'BC, DA"BC şi DA"' BC.

2. Dacă MA > BC/2 şi MA ≡ MN, problema are două soluţii.

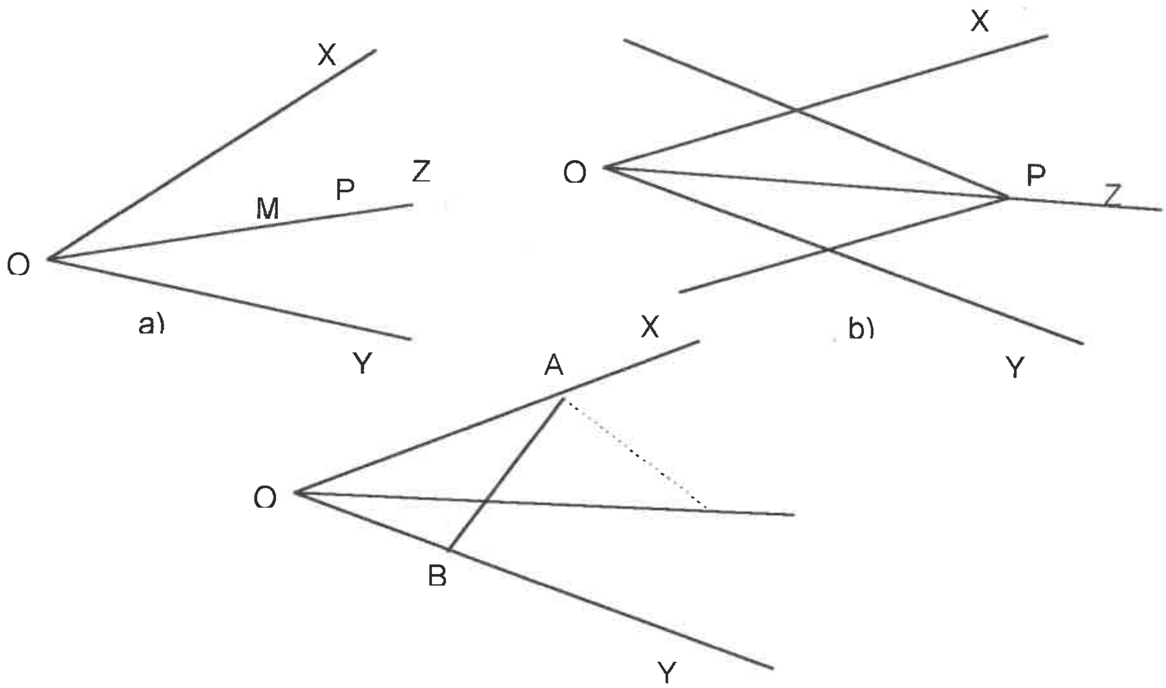
3. Dacă MA > MN problema nu are nici o soluţie.

4. Dacă MA = BC/2 şi unghiul a = 90° problema are o infinitate de soluţii.

5. Daccă MA < MC problema nu are nicio soluţie.

Exemplul 7. Fie trei semidrepte: OX, OY, OZ (OZ interioară unghiului OXY) şi un pnct M pe OZ. Să se cosntruiască o dreaptă care să treacă prin M şi să intersecteze pe OX şi OY în A şi B astfel încât (MA) ≡ (MB)

Figura 21



1. Presupunem problema rezolvată. Construim cele trei semidrepte şi presupunem că (MA) ≡ (MB), deci că OM este mediană în DOAB. La rezolvarea problemelor în care intervine mediana folosim construcţia uzuală: prelungim OM cu un segment MP congruent cu el. Deci, dacă M ar fi mijlocul lui AB, OAPB ar fi paralelogram. Am găsit deci soluţia urmează să realizăm construcţia.

2. Construcţie. În realizarea practică a construcţiei vom urmări respectarea succesiunii logice a etapelor. Nici un punc, cerc sau dreaptă, nu poate fi desenat dacă poziţia lui nu estte legată de elemente anterior determinate sau date prin enunţul problemei. Deci:

-prelungim OM cu (PM) ≡ (OM) (figura 21, a).

-prin P ducem paralele la OX şi respectiv OY (figura 21, b). dacă cele două drepte paralele cu laturile unghiului prin P taie OX în A şi respectiv OY în B, Ab este dreapta căutattă (figura c)

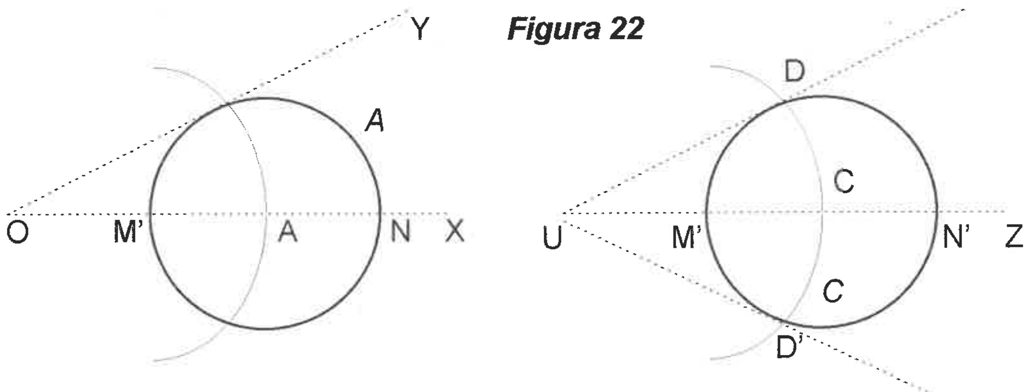
3. Demosntraţie. OBPA este paralelogram M fiind mijlocul diagonalei OP. Va fi mijloc şi pentru diagonala AB. Deci AB taie OZ în M şi (MA) ≡(MB)

4. Discuţie. Punctul P∈OX astfel ca (MP) ≡ (OM), este unic. Paralele prin P la OX şi respectiv OY sunt unice. Deci problema are o singură soluţiue.

Exemplul 8. Construcția unui unghi ce are o latură UZ şi este congruent cu unghiul XOY.

Construcția (figura). Un cerc *O* de centru O taie OX şi OY în A şi B. Un cerc *O* egal cu *O*, de centru U taie UZ în C. Cercul (C,AB) taie în D, unghiul DUZ este unghiul căutat.

Figura 22



Demonstrație. Triunghiurile AOB şi CUD sunt congruente (L.L.L.)

Discuție. Fie *A* cercul de centru A ce trece prin B. Cercurile *A,* O sunt secante, deci *A* taie OA în punctele M şi N, încât M $\in$ Int O, M $\in$ Ext O. Analog *C* taie UC în O' şi M' $\in$ Ext O'. Rezultă că *C* şi O' sunt secante.

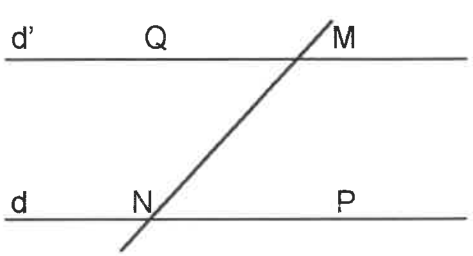
Există deci D comun lui *O'* şi C dar nu este unic. Fie D' simetricul lui D față de UC, adică {D, D'}=*O'*$\cap$ *C*.

Problema admite două soluții, semidreptele |UD şi |UD fiind în semiplane distincte delimitate de (UC).

Exemplul 9. Construcția paralelei prin M la d.

Analiza. Presupunem problema rezolvată; fie d' paralela prin M la d şi fie M,P pe d, Q pe d' încât P, Q să fie de părți distincte ale dreptei MN. Va avea loc unghiul MNP≡unghiul NMQ (fig.23).

Figura 23



Construcția. Luăm N,P pe d. Construim ca în exemplul precedent *O* |MQ încât ungiul MNP≡ungiul NMQ încât MQ să fie în semiplanul delimitat de MN ce nu conține M.

Discuția. Construcția relatată, nu cuprinde cazul M $\in$ d în acest d'=d. Soluția este unică.

Exemplul 10. Să se împartă segmentul |AB| în n părți egale (adică să se determine $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ pe AB încât $|AM_1|=|M_1M_2|= \ldots = |M_{n-1}B|$).

Construcția. Se consideră X nesituat pe (AB) și pe |AX punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, A_n încât $|AA_1|= |A_1A_2|=\ldots=|A_{n-1}A_n|$ se trasează dreapta A_nB și apoi paralele la ea prin punctele A_i, ($i \in \overline{1,n-1}$)ce taie |AB| în punctele M_i (fig. 24).

Figura 25

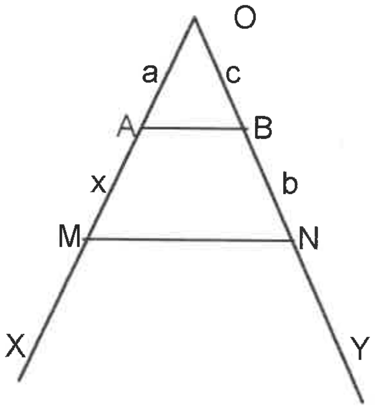
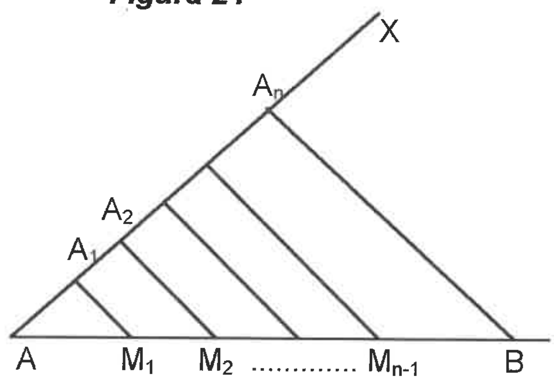


Figura 24



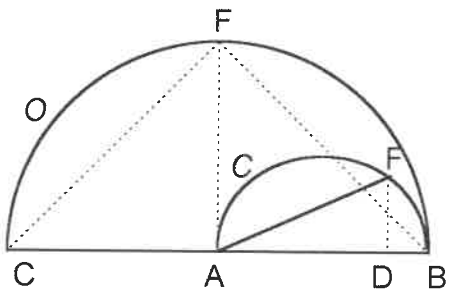
Demonstrație. Sunt îndeplinite ipotezele, deci și concluzia teoremei paralelelor interceptate.

Exemplul 11. Fiind date segmentele de lungime a, b, c să se construiască segmentul $x = \frac{b \cdot a}{c}$ (al patrulea proporțional).

Analiza. Punând egalitatea dată sub forma $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ ne propunem ca această relație să rezulte prin aplicarea teoremei lui Thales. Construcția și demonstrația sunt sugerate în (fig.25).

Exemplul 12. Fiind date segmente de lungimi a, b să se constriască un segment y, încât y^2=a·b (y se numește media geometrică a segmentelor a și b).

Figura 26



Analiza. Egalități de forma celei din enunț apar în teorema catetei sau în prima teoremă a înălțimii.

Constucția. Pe o dreaptă de părți diferite ale lui A se iau B şi C încăt AB=a, AC=b. Cercul de diametru BC taie în E perpendiculara în A pe BC. Afirmăm că are are loc AE=y. Figura 26 mai prezintă *O* variantă de construcție. Presupunând b<a, considerăm D $\in$ AB încât AD=b. Trasăm cercul *C* de diametrul AB ce este tăiat în F de perpendiculara în D pe AB. Afirmăm că are loc AF=y.

Demonstrația: Unghiul BEC (respectiv unghiul AFD) sunt unghiuri înscrise în semicercuri, deci sunt drepte. Prima teoremă a înălțimii în ΔEBC (respectiv teorema catetei ΔFAB) conduc la egalitățile enunțate.

Exemplul 13. Fiind date segmentele a, b şi un unghi α să se construiască un triunghi ABC în care BC=a, AC=b şi unghiul ABC=α.

Construcția. Fie BC=a. Construim |BX încât unghiul XBC=α şi cercul *C* (C,b). Pentru A comun lui *C* şi lui |BX sunt îndeplinite condițiile enunțate.

Discuția. Trebuie explicitată condiția ca |BX să taie *C* şi să constatăm câte puncte au în comun |BX şi *C*.

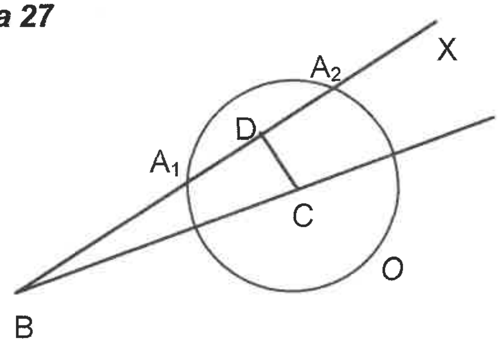
Dacă $\alpha \geq 90°$, |BX taie *C* (într-un singur punct) dacă şi numai dacă b>a. Pentru a demonstra această afirmație vom face apel la aplicația ce arată că într-un triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.

Dacă α < 90°. Considerăm şi perpendiculara CD pe BX.

Lungimea c a segmentului CD este complet determinată de datele problemei (de fapt c=a$\cdot \sin\alpha$). Apar următoarele patru posibilități şi numai acestea:

- Dacă b<c, *C* nu taie BX (deci nici semidreapta |BX).
- Dacă b=c, *C* $\cap$ |BX = {D} şi triunghiul DBC este soluția unică.
- Dacă c<b<a, *C* $\cap$ |BX = {A_1,A_2} problema admite două soluții (fig.27)

Figura 27

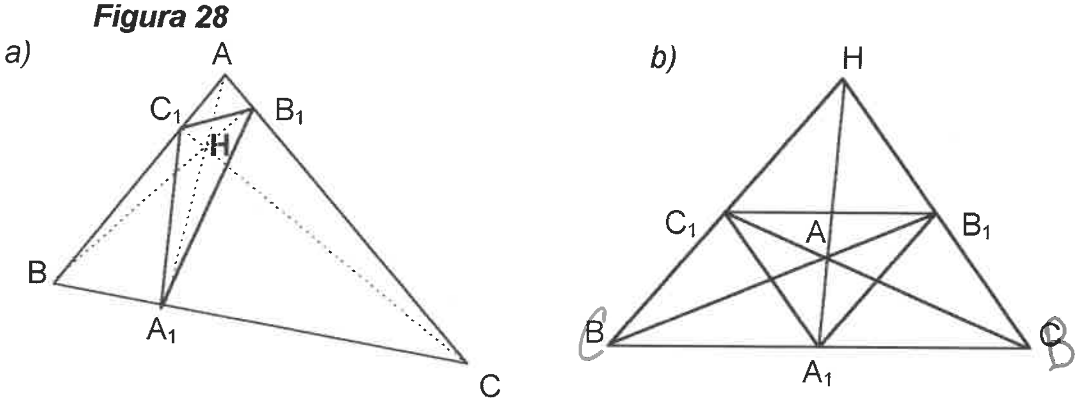


Dacă $b \geq 0$, BX taie *C* în două puncte dintre care convine problemei numai acel punct situat pe |BX, deci în acest ultim caz soluția este unică. Desigur că toate afirmațiile din cadrul discuției necesită demonstrații. Aceste demonstrații decurg din teoremele de intersecție ale cercului şi ale inegalităţilor dintre oblice (şi perpendiculare).

Exemplul 14. Să se construiască un triunghi ABC când se cunosc picioarele A_1,B_1,C_1 ale înălţimilor sale (din A,B respectiv C).

Analiza. Presupunem problema rezolvată, fie ABC triunghiul căutat, A_1,B_1,C_1 triunghiul său ortic (fig. 28.a). Deaoarece unghiul $AA_1B=AB_1B=90°$ punctele A,A_1,B_1,B sunt pe un acelaşi cerc (de diametru AB). Mai presupunem că ABC este triunghi ascuțitunghic şi acum putem constata că $A\ B_1A_1B$ este patrulater convex inscriptibil, deci unghiul AA_1B_1=unghiul $ABB_1=90°$-unghiul A. Analog constatăm că AC_1A_1C este patrulater convex inscriptibil şi unghiul AA_1C_1=unghiul $ACC_1= 90°$-unghiul A. Prin urmare $|A_1H$ este bisectoarea interioară pentru $\Delta B_1A_1C_1$. Dreapta BC, perpendiculară în A_1 pe A_1H va conține bisectoarele exterioare. Vom putea determina deci A;B;C drept centre ale cercurilor exînscrise triunghiului $B_1A_1C_1$. Examinăm în contiuare şi ipoteza că triunghiul căutat ar fi obtuzunghic, unghiul $BAC>90°$ (fig. 28.b). Vom constata acum analogia $|A_1A$ este bisectoare interioară pentru $\Delta B_1A_1C_1$ dar $|B_1B$, $|C_1C$ sunt bisectoare exterioare

Figura 28



pentru unghiul $A_1B_1C_1$ respectiv unghiul $A_1C_1B_1$. Prin urmare A este centrul cercului înscris triunghiului $A_1B_1C_1$ iar B_1C sunt centre de cercuri exînscrise.

Construcția. Punem în evidență centrul H al cercului înscris în $\Delta A_1B_1C_1$ şi centrele H_{a1}, H_{b1}, H_{c1} ale cercurilor exînscrise.

Discuția. Problema are patru soluții $H_aH_bH_c$, HH_cH_b, H_cHH_a, H_bH_aH pentru ABC în toate cazurile când $A_1B_1C_1$ nu sunt coliniare, dacă A_1,B_1,C_1 sunt colinare problema nu admite soluție.

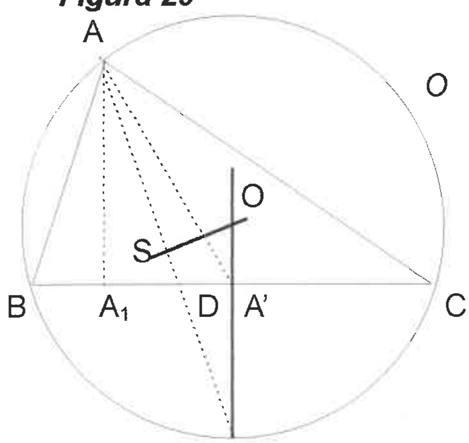
Exemplu 15. Să se construiască triunghiul ABC cunoscâsnd lungimile h,t,m, ale segmentelor, ce constituie înălțimea, bisectoarea şi respectiv mediana din A.

Analiza. Presupunem problema rezolvată: fie ABC triunghiul căutat, înălțimea sa AA_1, bisectoarea AD şi mediana AA' (cu A_1,D,A' pe BC fig.29).

Pentru a avea soluție este necesar (însă nu şi suficient) ca perpendiculara $|AA_1|$ să fie mai scurtă decât |AD| şi |AA'|. Reținem deci condițiile $h<t$, $h<m$. Acum triunghiurile dreptunghice A_1AD şi A_1AA' se pot construi. Dar pornind de la aceste elemente, determinarea vârfurilor B,C încă nu exte uşoară.

Dar bisectoarea |AD mai trece prin mijlocul E al arcului BC (ce nu conține A) din cercul circumscris triunghiului prin acel punct E trece şi mediatoarea laturii BC. Deci vom putea construi E intersectând paralela prin A' la $|AA_1|$ cu |AD|. În continuare vom găsi centrul O al cercului *O* intersectând pe |EA'| cu mediatoarea segmentului |AE|.

Figura 29



Construcția. Luăm $AA_1=h$ şi intersectăm o semidreaptă s din A_1 perpendiculară pe $|AA_1|$ cu cercurile (nefigurate pe desen) cu centre în A şi raza t, respectiv m pentru a obține D şi A'. Trasăm paralela prin A' la $|AA_1|$ până taie |AD| în E. Trasăm mediatoarea lui |AE| ce taie |EA'| în O . Cercul *O*(O,OA) taie $|A_1D|$ în B,C.

Discuția. Găsisem în cadrul analizei că sunt necesare condițiile $h \leq t$ şi $h \leq m$. Presupunem inegalitățile stricte. Trebuie acum să ne asigurăm doar că dreapta DA' este secantă lui *O* (în B,C) pentru ca întreaga construcție să fie lipsită de verigi dubitabile. Condiția revine la OA' < OA, adică O - A' - E. Această nouă condiție este realizată dacă şi numai dacă are loc A_1D - A' adică t < m. Soluția este unică până la renotarea punctelor B,C, inlocuirea triunghiului ABC cu simetricul său față de înălțimea $|AA_1|$ (legerea semidreptei intersectate din cadrul construcției) şi până la o deplasare a triunghiului ABC

(dictată de alegerea arbitrară a segmentului AA_1 de lungime h). Dacă h = t , AB=AC deci h = t = m. În acest caz problema admite o infinitate de soluții.

Exemplul 16. Să se împartă un cerc în 3,4 şi 6 părți egale.

Analiza. Problema revine la găsirea unor unghiuri la centru având măsura 360°/3=120°, 360°/4=90°, 360°/6=60°. Construcția este bine cunoscută în fiecare caz. Pentru a împărții cercul în 4 părți egale se duc doi diametri perpendiculari. Pentru a-l împărți în 6 părți egale se taie cercul dat *O*(O,R) cu un cerc $A_1(A_1,R)$ unde $A_1 \in O$ în punctele A_2 şi A_6. Apoi $A_2(A_2,R)$ taie *O* în A_1 şi A_3 ... Şi procedeul continuă. Unind aceste puncte din două în două obținem împărțirea cercului în 3 părți egale.

CAPITOLUL VIII

1. Probleme rezolvate

Problema 1. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând m_a, h_a şi unghiul BAC (m_a, h_a sunt mediana şi înălţimea duse din A).

Soluţie. Presupunem problema rezolvată, fie ABC triunghiul căutat în care sunt date m_a, h_a şi unghiul BAC. Triunghiul dreptunghic AA_1A' poate fi construit (fig.1). Fie A" simetricul punctului A faţă de mijlocul A' al segmentului [BC]. Patrulaterul ABC"C este paralelogram. Rezultă $m(\sphericalangle ACA") = 180° - m(\sphericalangle BAC)$. Prin urmare din punctul C se vede segmentul |AA"| sub un unghi suplementar unghiului dat $\sphericalangle$ BAC. Prin urmare punctul C se va afla la intersecţia dreptei A_1A' cu arcul capabil de unghiul suplimentar unghiului dat $\sphericalangle$BAC.

Problema 2. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând cele trei puncte A_1, A_2, A_3 în care înălţimea, bisectoarea şi mediana corespunzătoare vârfului A intersectează cercul circumscris triunghiului.

Figura 30

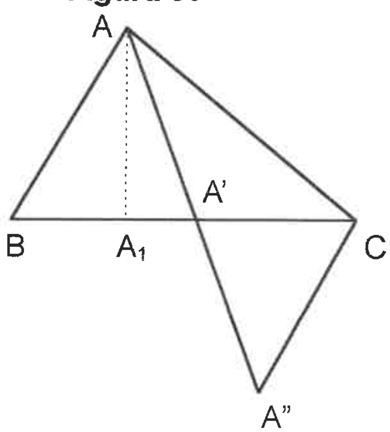
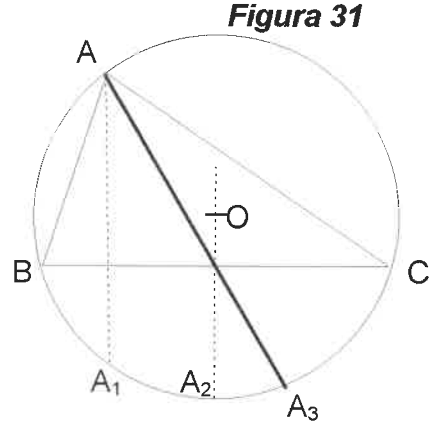


Figura 31



Soluţie. Se presupune problema rezolvată şi fie ABC triunghiul căutat. Înălţimea, bisectoarea şi mediana corespunzătoare vârfului A intersectează $C(O,R)$ circumscris triunghiului în punctele date A_1, A_2, A_3. Deoarece A_2 este mijlocul arcului BC, rezultă $OA_2 \| AA_1$. Fie $\{A'\} = OA_2 \cap AA_3$. Este evident că A' este mijlocul segmentului|BC|. Din analiza figurii rezultă următoarea construcţie (fig. 31). Se construieşte cercul $C(O,R)$circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$, se uneşte O cu A_2: paralela prin A_1 la OA_2 inter-

secteează $C(O,R)$ în punctul A; se uneşte A cu A_3 şi fie $\{A'\}=OA_2 \cap AA_3$ perpendiculara în A' pe OA_2 intersectează $C(O,R)$ în punctele B şi C.

Problema 3. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând a, m_a şi unghiul BAC.

Soluţie. Se presupune problema rezolvată şi fie ABC un triunghi căutat în care sunt date a,m_a şi ∢ BAC (fig. 32). Este uşor de văzut că punctul A se află pe cercul $C(A',m_a)$, unde A' este mijlocul laturii |BC|. Pe de altă parte din punctul A se vede segmentul |BC| sub un unghi dat ∢ BAC. Rezultă că punctul A se află la intersecţia cercului $C(A',m_a)$ cu arcele de cerc din care segmentul |BC| se vede sub unghiul dat BAC. Construcţia triunghiului ABC este următoarea: se trasează segmentul [BC], se construieşte cercul $C(A',m_a)$ apoi arcele din care |BC| se vede sub unghiul dat BAC; aceste rce intersectează $C(A',m_a)$ în punctele A şi $\overline{A}$ (simetrice faţă de dreapta BC). Triunghiul ABC şi $\overline{A}$BC sunt soluţii ale problemei.

Problema 4. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând m_a, m_b, m_c.

Soluţie. Presupunem problema rezolvată, fie ABC triunghiul căutat în care sunt date $AA'=m_a$, $BB'=m_b$, $CC'=m_c$. Fie A', simetricul centrului de greutate G faţă de A'. Patrulaterul $BGCA_1'$ este un paralelogram. Atunci $CA_1'=\frac{2}{3}m_b$, $GA_1'=\frac{2}{3}m_a$, $GC=\frac{2}{3}m_c$. Prin urmare triunghiul GCA_1' poate fi construit. Construcţia triunghiului ABC este evidentă (fig. 33).

Figura 32

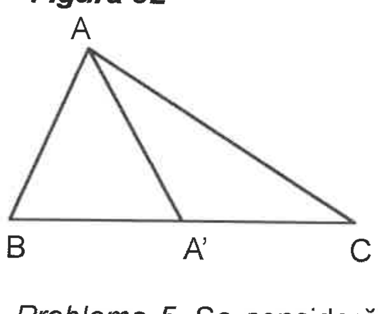
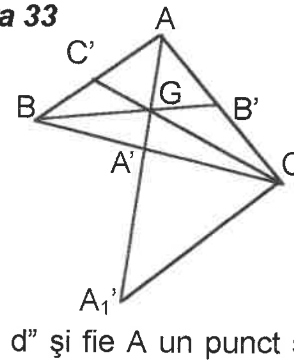


Figura 33



Problema 5. Se consideră dreptele paralele d', d" şi fie A un punct situat între ele. Să se construiască un cerc care să treacă prin A şi să fie tangent la dreptele d' şi d".

Soluţie. Fie r distanţa între d' şi d" atunci r este raza unui cerc căutat. Fie d paralela cu d' şi d" situată la distanţa r de d' şi d". Cercul $C(A,r)$ intersectează dreapta d în punctele O_1 şi O_2. Cercurile $C(O_1,r)$ şi $C(O_2,r)$ răspund problemei (fig. 34).

Problema 6. Să se construiască un cerc care să fie tangent la două drepte paralele date d', d"şi la un cerc dat $C(O,r)$ situat între ele.

Soluție. Fie 2R distanța între d' şi d" atunci R este raza unui cerc căutat. Fie d paralela cu d' şi d" situată la distanța R de d' şi d". Cercul $C(O,r+R)$ intersectează dreapta d în punctele O_1 şi O_2. Cercurile $C(O_1,R)$ şi $C(O_2,R)$ sunt cercurile căutate.

Figura 34

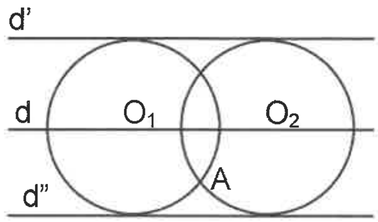
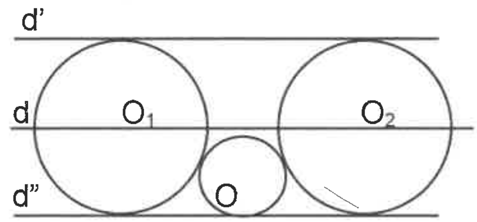


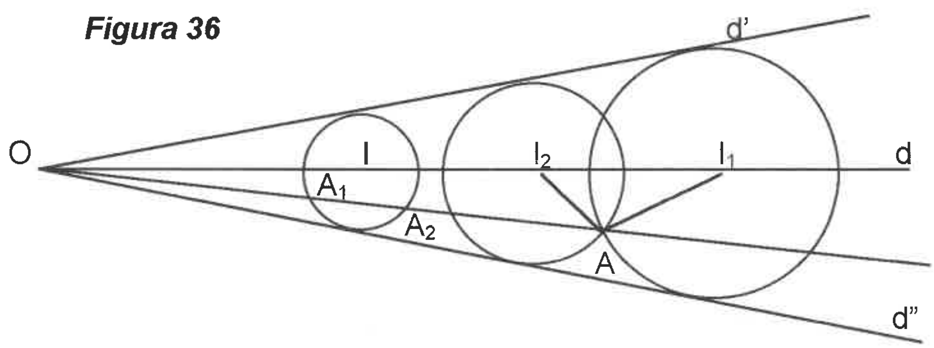
Figura 35



Problema 7. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat A şi să fie tangent ladouă drepte neparalele date d' şi d".

Soluție. Fie $\{O\}=d'\cap d"$ şi $C(I,r)$ un cerc arbitrar tangent la cele două drepte date. Se notează $\{A_1, A_2\}=OA\cap C(I,r)$. Cercurile căutate sunt transformatele cercului $C(I,r)$ prin omotetiile $T_1(O,OA/OA_1)$ şi $T_2(O,OA/OA_2)$.

Figura 36



Problema 8. Să se construiască un cerc de rază dată Rcare să fie tangent la un cerc dat $C(O_1,R_1)$ şi care să treacă printr-un punct dat A.

Soluție. Se presupune $R_1 > R$ (cazurile $R_1=R$ şi $R_1<R$ tratându-se analog). Se presupune problema rezolvată. Fie $C(O,R)$ un cerc căutat. Deoarece $C(O,R)$ este tangent cercului $C(O_1,R_1)$ rezultă că punctul O se află pe un cerc de centr O_1 şi de rază R_1+R.

Cazul I. $A \in \text{Int}\, C(O_1,R_1)$. Există 3 posibilități:

1.Dacă cercurile $C(A,R)$ şi $C(O_1,R_1-R)$ nu au puncte comune, deci dacă $C(O,R)\cap C(O_1,R_1-R)=\varnothing$, atunci problema nu admite soluuție.

2.Dacă cercurile $\mathcal{C}(A,R)$ şi $\mathcal{C}(O_1,R_1-R)$ sunt tangente deci există un punct O' astfel încât $\mathcal{C}(A,R)\cap\mathcal{C}(O_1,R_1-R)=\{O'\}$, atunci problema admite o soluție şi anume $\mathcal{C}(O',R)$.

3.Dacă există în plan punctele O', O" astfel încât $\{O',O''\}=\mathcal{C}(A,R)\cap\mathcal{C}(O_1,R_1-R)$ atunci problema admte două soluții $\mathcal{C}(O',R)$ şi $\mathcal{C}(O'',R)$.

Cazul II. $A\in\mathcal{C}(O_1,R_1)$. Problema admite două soluții $\mathcal{C}(O',R)$ şi $\mathcal{C}(O'',R)$, unde $\{O'\}=O_1A\cap\mathcal{C}(O_1,R_1+R)$ şi $\{O''\}=O_1A\cap\mathcal{C}(O_1,R_1-R)$.

Cazul III. $A\in\mathcal{C}(O_1,R_1+R)$. Există trei situații.

1.Dacă cercurile $\mathcal{C}(A,R)$ şi $\mathcal{C}(O_1,R_1+R)$ nu au puncte comune, atunci problema nu admite soluție.

2.Dacă cercurile $\mathcal{C}(A,R)$ şi $\mathcal{C}(O_1,R_1+R)$ sunt tangente într-un punct O', atunci problema admite o soluție şi anume cercul $\mathcal{C}(O',R)$.

3.Dacă cercurile $\mathcal{C}(A,R)$ şi $\mathcal{C}(O_1,R_1+R)$ au două puncte comune O' şi O", atunci problema admite două soluții şi anume cercurile $\mathcal{C}(O',R)$ şi $\mathcal{C}(O'',R)$.

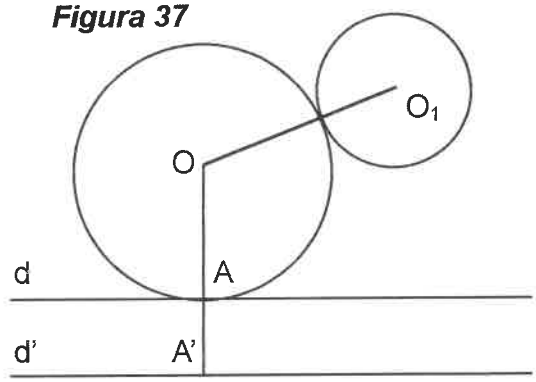
Problema 9. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat O_1 şi care să fie tangent la o dreaptă dată d' într-un punct $A\in d$.

Soluție. Presupunem problema rezolvată. Fie $\mathcal{C}(O,R)$ un cerc căutat. Este evident că punctul O se află la intersecția perpendicularei în A pe dreapta d cu mediatoarea segmentului $|AO_1|$. Este uşor de văzut în cazul $O_1\in d\setminus\{A\}$ problema nu are soluție, iar în cazul $O_1=A$ problema admite o infinitate de soluții. În cazul $O_1\notin d$ problema admite o soluție.

Problema 10. Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă dată d într-un punct dat $A\in d$ şi la un cerc dat $\mathcal{C}(O_1,R_1)$.

Soluție. Presupunem problema rezolvată. Fie $\mathcal{C}(O,R)$ un cerc căutat. Cercul $\mathcal{C}(O,R+R_1)$ trece prin O_1 şi este tangent dreptei d' (d' este paralela la d la distanța R_1). Fie $\{A'\}=d'\cap OA$. Problema s-a redus la următoarea: "Să se construiască un

Figura 37



cerc care să treacă printr-un punct dat O_1 şi care să fie tangent la o dreaptă dată d' într-un punct dat A' "(rezolvare dată la problema 9).

Problea 11. Să se construiască un cerc tangent la trei drepte date d_1, d_2, d_3.

Soluție. Cazul I. $d_1 \| d_2 \| d_3$. Este evident că problema nu admite soluție.

Cazul II. $d_1 \| d_2 \nparallel d_3$. Fie 2r distanța dintre dreptele paralele d_1 şi d_2 . Atunci r este raza cercului căutat. Este evident că centrul cercului căutat se află pe dreapta d (unde $d \| d_1 \| d_2$ este situată la distanța r de d_1 şi d_2). Se notează $\{A\}=d_1 \cap d_3$, $\{B\}=d_2 \cap d_3$ şi fie C_1, $C_2 \in d_1$ astfel încât $A \in (C_1,C_2)$. Bisectoarele unghiurilor C_1AB şi C_2AB intersectează dreapta d în punctele O_1 şi O_2. Cercurile $\mathcal{C}(O_1,r)$ şi $\mathcal{C}(O_2,r)$ răspund problemei.

Cazul III. $d_1 \nparallel d_2 \nparallel d_3 \nparallel d_1$. Se notează $\{A\}=d_2 \cap d_3$, $\{B\}=d_1 \cap d_3$ şi $\{C\}=d_1 \cap d_2$ (fig.39). Soluțiile problemei sunt date de cercurile înscrise şi exînscrise triunghiului ABC.

Figura 38

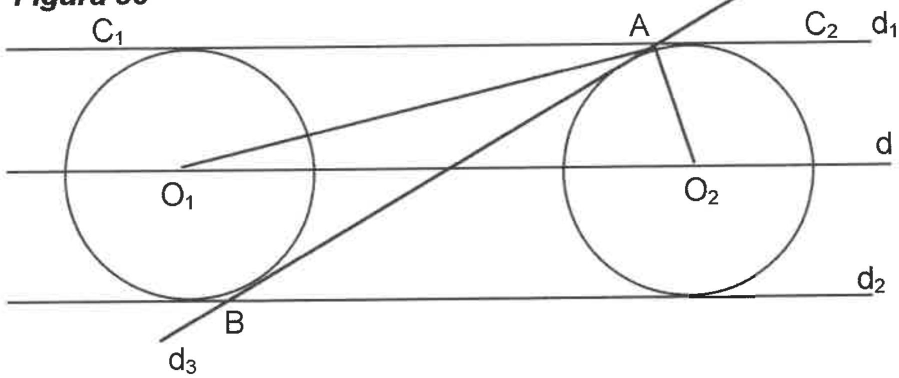


Figura 39

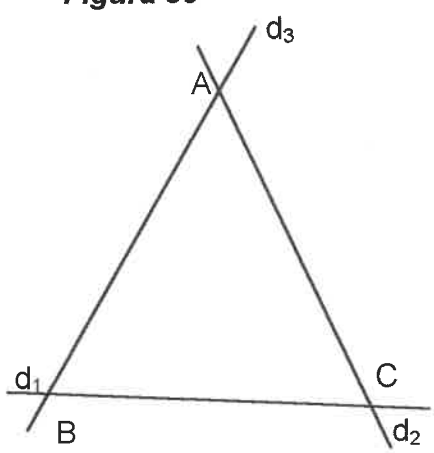
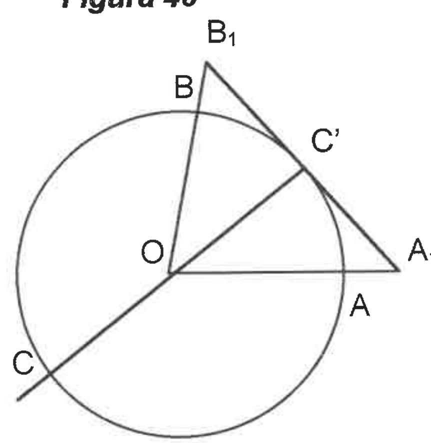


Figura 40



Problema 12. Să se inscrie într-un cerc dat $C(O,R)$. Trei cercuri de raze egale, tangente două câte două şi tangente cercului dat $C(O,R)$.

Soluție. Fie $A,B,C \in C(O,R)$ astfel încât $m(\sphericalangle AOB)= m(\sphericalangle AOC)=m(\sphericalangle BOC)=120°$.

Fie C' punctul diametral opus lui C. Tangenta în C' la cercul $C(O,R)$ intersectează dreptele OA şi OB în A_1 şi B_1. Fie $C(I_3,r)$ cercul înscris în triunghiul A_1OB_1. Analog se obțin cercurile $C(I_2,r)$ şi $C(I_1,r)$. Cercurile $C(I_i,r)$, $i\in\{1,2,3\}$ răspund problemei (fig. 40).

Problema 13. Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte date O_1, O_2 şi care este tangent unei drepte date d.

Soluție. Cazul I. $d||O_1O_2$. Fie O_3 punctul în care mediatoarea segmentului $|O_1O_2|$ intersectează dreapta d. Cercul circumscris triunghiului O_1, O_2,O_3 este soluția problemei.

Cazul II. $d \nparallel O_1O_2$. Fie $\{A\}= O_1O_2\cap d$. Se presupune problema rezolvată şi fie $C(O,R)$ un cerc căutat (fig. 41). Din puterea punctului A față de cercul $C(O,R)$, rezultă $AB^2=AO_1\cdot AO_2$. Deoarece AO_1 şi AO_2 sunt cunoscute, ultima egalitate dă pe AB. Se construieşte semicercul de diametru O_1A+AO_2 (fig. 42). Perpendiculara în A pe O_1O_2 intersectează semicercul în punctul B. Din triunghiul dreptunghic O_1BO_2 ($m(\sphericalangle O_1BO_2)=90°$) rezultă că AB este media geometrică între AO_1 şi AO_2.

Figura 41

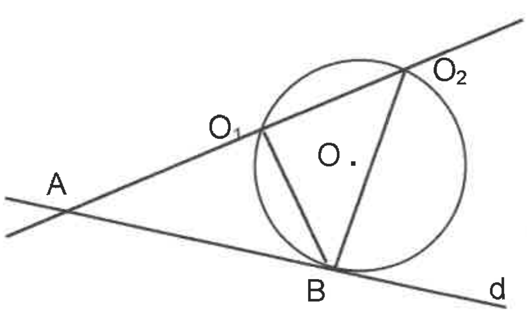
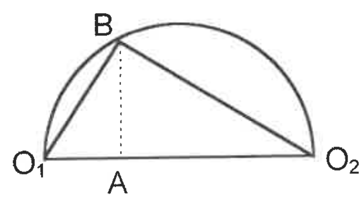


Figura 42



Construcție. Se construieşte punctula A astfel încât $\{A\}= O_1O_2\cap d$. Se află AB din egalitatea $AB^2= AO_1\cdot AO_2$. Cercul $C(A,AB)$ intersectează dreapta d în punctele B şi B'. Perpendiculara în B (respectiv B') intersectează mediatoarea segmentului $|O_1O_2|$ în punctele O şi O'. Cercurile $C(O,OB)$ şi $C(O',OB')$ răspund problemei.

Problema 14. Să se construiască un cerc tangent la două cercuri date $C(O_1,R_1)$ şi $C(O_2,R_1)$ şi la o dreaptă dată d.

Soluție. Se presupune problema rezolvată şi fie $C(O,R)$ un cerc căutat. Cercul $C(O,R+R_1)$ trece prin punctele O_1,O_2 şi este tangent dreptei d' (d' este paralela la d dusă la distanța $R+R_1$ de O, deci la distanța R_1 de d). S-a redus astfel problema la problema anterioară (fig. 43).

Problema 15. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat A, să fie tangent la un cerc dat $C(O_1,R_1)$ şi la o dreptă dată d.

Soluție. Să presupune problema rezolvată şi fie $C(O,R)$ unul din cercurile căutate. Fie $\{B\}=d\cap C(O_1,R_1)$ şi $C\in d$ astfel încât $O_1C \| OB$. Dreapta O_1C intersectează cercul $C(O_1,R_1)$ în punctele D şi E ($D \in (O_1C)$). Fie F punctul de tangență al cercului $C(O,R)$ şi $C(O_1,R_1)$ (fig. 44). Din asemănarea triunghiurilor O_1EF şi OBF rezultă că punctele E,F,B sunt coliniare. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice EFD şi ECD se obține $EF\cdot EB=EC\cdot ED=const$. Fie A' al doilea punct de intersecție a dreptei EA cu cercul $C(O,R)$. Atunci $EF\cdot EB=EA\cdot EA'=EC\cdot ED$. Din ultima egalitate rezultă: $EA/ED=EC/EA'$. Deoarece $\sphericalangle A'ED=\sphericalangle AEC$, rezultă că triunghiurile EA'D şi ECA sunt asemenea. Prin urmare punctul A' poate fi construit. S-a redus problema dată la una din următoarele probleme:

i. Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte A,A' şi care să fie tangent la un cerc dat $C(O_1,R_1)$ (Problema lui Apoloniu)
ii. Să se construiască un cerc care treacă prin două puncte date A,A' şi care să fie tangent la o dreaptă dată d.

Figura 43

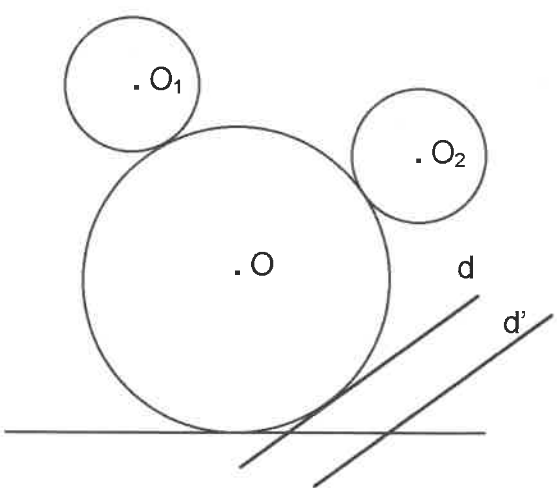
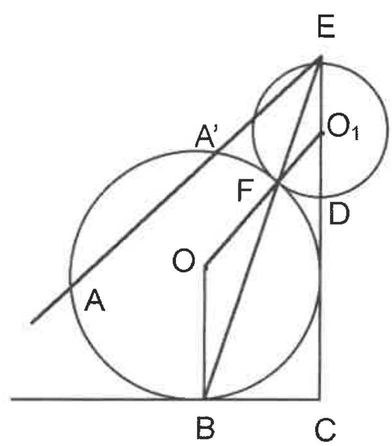


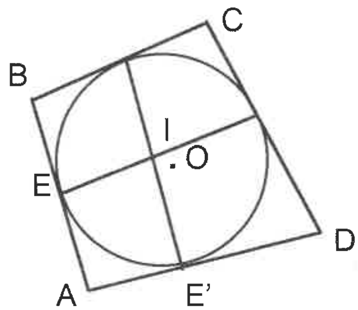
Figura 44



Problema 16. Să se costruiască un patrulater circimscriptibil, cunoscând cercul *C*(O,r) înscris, un vârf A şi punctul de intersecție al diagonalelor.

Soluție. Punctul I de intersecție a diagonalelor unui patrulater circuscriptibil se găseşte la intersecția dreptelor care trec prin punctele de contact ale laturilor opuse cu cercul înscris (fig. 45).

Figura 45



Construcția. Din vârful A se duc tangentele AE, AE', la cercul dat şi se unesc punctele E,E' cu I. dreptele EI, E'I determină celelalte două puncte de contact ale laturilor patrulaterului cu cercul înscris. Tangentele în aceste puncte împreună cu tangentele AE, AE' determină patrulaterul cerut.

2. Probleme propuse

1. Fiind date segmentebe de lungimi a,b, unde a>b, construiți segmente de lungimi x,y, unde $x^2=a^2+b^2$ şi $y^2=a^2-b^2$.
2. Fiind dat un etalon pentru măsurarea lungimilor construiți segmente de lungimi $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6}$.Găsiți un procedeu prin care să apară succesiv segmente de lungimi $\sqrt{n}$ pentru numere naturale $n \neq 0$.
3. Fiind date segmentele de lungimi a,b,c construiți segmente de lungimi $x=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$ şi $y=\sqrt[4]{abc(a+b+c)}$.
4. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile a două laturi şi a unei mediane.
5. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile a două mediane şi a unei laturi.
6. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile medianelor sale.
7. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile a două laturi şi a unei înălțimi.
8. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile a două înălțini şi a unei laturi.

9. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile a două mediane şi o înălţime.
10. Construiți triunghiul ABC cunoscând lungimile a două înălţimi şi o mediană.
11. Construiți un punct M pe dreapta d încât unghiul AMB să fie maxim, A şi B fiind puncte date.
12. Construiți un punct M pe cercul *O* încât unghiul AMB să fie maxim, respectiv minim, A şi B fiind puncte date.
13. Fiind date segmentele a, b să se construiască segmentele de lungimi x încât $x^2-ax+b^2=0$.
14. Fiind date segmentele a, b să se construiască un segment x încât $x^2-ax-b^2=0$.
15. Construiți axa radială d a cercurilor neconcentrice $\mathcal{C}$(C,r) şi $\mathcal{D}$(D,R).
16. Să se construiască un patrulater cunoscând mijloacele a trei laturi şi un segment paralel şi egal cu cea de-a patra latură.
17. Să se construiască un patrulater cunoscând laturile şi segmentul care uneşte mijloacele a două laturi opuse.
18. Să se construiască un patrulater ABCD cunoscând unghiurile şi diagonalele.
19. Să se circumscrie un pătrat unui patrulater dat.
20. Să se ducă prin două puncte A,B un cerc tangent la o dreaptă xy.
21. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând laturile AB, AC şi ştiind că $\measuredangle C=2\cdot\measuredangle B$.
22. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând laturile AB, AC şi ştiind că $\measuredangle C=3\cdot\measuredangle B$.
23. Să se construiască un pentagon cunoscând mijloacele laturilor.
24. Să se construiască un poligon având desenate în plan perpendicularele $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ridicate pe mijloacele laturilor.

Rezolvați următoarele probleme numai cu ajutorul riglei.

25. Fiind dat un unghi drept şi un unghi arbitrar care au vârfurile şi o latură comună dublați unghiul arbitrar dat.
26. Fiind dat un unghi şi bisectoarea lui b, construiți o perpendiculară pe b, în vârful unghiului dat.

27. Pe o dreaptă l sunt date trei puncte P,Q,R, astfel încât Q este mijlocul segmentului PR. Construiți o paralelă la l, printr-un punct dat S.
28. Fiind date două drepte paralele d_1 şi d_2 înjumătățiți un segment dat AB de pe d_1.
29. Împărțiti un segment AB în n părți egale, dată fiind o paralelă d la dreapta AB.
30. Fiind dat un paralelogram ABCD, duceți o paralelă printr-un punct P la o dreaptă dată D.
31. Fiind dat un paralelogram, înmulțiți cu n un segment dat.
32. Fiind dat un paralelogram, împărțiți un segment dat în n părțiegale.
33. Fiind dat un cerc şi centrul său, înmulțiți şi împărțiți cu n un segment dat.
34. Construiți dreapta care uneşte două puncte date, aflate la o distanță mai mare decât lungimea riglei folosite.

CONCLUZII

Lucrarea este alcătuită dintr-o introducere, unde este făcut un scurt istoric al problemelor de construcții geometrice cu rigla şi compasul şi şapte capitole. Pe parcursul primelor cinci capitole este prezentată teoria generală a construcțiilor geometrice cu rigla şi compasul, transpunând problema în limbajul algebrei, am încercat o tratare cât mai completă, făcând apel şi la teoria lui Galois. Nerezolvabilitatea problemelor celebre ale antichității este cuprinsă în lucrare, încercând o tratare elementară dar şi una complexă având în vedere teoria lui Galois.

Capitolul şase cuprinde metodica rezolvării problemelor de construcțiii cu rigla şi compasul. Având în vedere etapele expuse, orice problemă de construcție cu rigla şi compasul poate fi abordată, ordinea expusă nu este obligatorie, unele etape pot fi omise la unele probleme. Acest capitol este ilustrat cu şaisprezece probleme, cu precizările de rigoare pentru clasele VI-VII, celelalte probleme pot fi abordate la nivelul claselor IX - XII. Orice problemă de construcție prezintă frumusețea ei, care trebuie descoperită, nu există o rețetă generală de rezolvare a problemelor. Metodica rezolvării problemelor de construcție cu rigla şi compasul încearcă să prezinte un cadru general în care să ne plasăm. Nu au fost omise referiri la probleme care cer să fie rezolvate numai cu compasul sau numai cu rigla.

Capitolul şapte este alcătuit din şaisprezece probleme rezolvate, unde am încercat în spiritul celor expuse în capitolul anterior să măresc numărul exemplelor de probleme rezolvate, am avut în vedere şi rezolvare de probleme unde să folosesc transformările geometrice. În final am propus spre rezolvare un număr de 34 probleme, ultimile 10 având cerința de a fi rezolvate numai cu ajutorul riglei.

BIBLIOGRAFIE

1.Alexandrov, I.: "Probleme de construcții geometrice", Editura Tehnică, București 1951

2.Barbilian, D.: "Algebră", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985

3.Boskoff, V.; Nicolescu,L.: "Probleme practice de geometrie", Editura Tehnică, Bucureşti, 1990

4.Brânzei, D.; ş.a.: "Bazele raționamentului geometric", Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1983

5.Brânzei, D.: "Introducere în geometrie", Universitatea "Al.I. Cuza", Iaşi, 1977 şi 1982

6.Brânzei, D.; ş.a.: "Matematici elementare; proble de sinteză", Junimea, Iaşi, 1983

7.Brânzei, D.: "Modele geometrice", Universitatea "Al.I. Cuza", Iaşi,1982

8.Buicliu, Gh.: "Probleme de construcții geometrice", Editura tehnică, 1957

9.Chiței, Gh. A.: "Metode de rezolvare a problemelor de geometrie", Editura Didactică şi Pedagogică,1969

10.Courant, H. şi Robbins, H.: "Ce este matematica?", Editura Ştiințifică, Bucureşti,1969

11.Edwin, E. Moise: "Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

12.Hadamard, J.: "Lecții de geometrie elementară " (2 vol.), Editura Tehnică, Bucureşti, 1960-1961

13.Hollinger, A.: "Despre inițierea în geometrie în culegerea "Probleme actuale ale modernizării învățământului matematic"", Bucureşti, 1968

14.Kolmogorov, A.N.; ş.a.: "Geometrie pentru clasele VI-VIII", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975

15.Leonte, A.; Trandafir,R.: "Principii şi structuri fundamentale în matematica de liceu", Editura Albatros, Bucureşti, 1986

16.Mihăilescu, C.: "Geometria elementelor remarcabile", Editura Tehnică, 1957

17.Miron, R.: "Geometria elementară",Editura Didactică, 1968

18.Polya,G.; "Cum rezolvăm o problemă", Editura Ştiinţifcă, Bucureşti, 1965

19.Popescu, O. şi Radu, V.: "Metodica predării geometriei în gimnaziu", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

20.Rusu, Eugen: "Metodica predării geometriei în şcoala generală", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968

21.Toth, A.: "Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice", Editura Didactică, 1963

22.Ţiţeica, G. : "Probleme de geometrie", Editura Tehnică, Bucureşti, 1981

Cuprins

ISBN: 978-606-37-0409-3